Les nombres complexes

1 Invention

1.1 L'idée d'un nombre imaginaire

Nous savons que le produit de deux nombres positifs donne un nombre positif. En particulier le carré d'un nombre positif qui est égal au produit de ce nombre par lui-même donne un nombre positif.

exemple : $(+5)^2 = (+5) \times (+5) = +25$

De même le produit de deux nombres négatifs donne un également nombre positif. En particulier le carré d'un nombre négatif qui est égal au produit de ce nombre par lui-même donne un nombre positif.

exemple : $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = +25$

Il n'y a, à priori, pas d'autre cas de figure pour obtenir un carré. Pouvons-nous conclure qu'un carré soit *toujours* un nombre positif ? Non, ça montre que le carré de n'importe quel nombre *réel* est positif.

Mais cela ne démontre pas que tout carré soit positif.

On peut imaginer que le carré de quelque chose qui ne serait pas un nombre ordinaire, pas un nombre réel, appelons le un nombre *imaginaire*, soit négatif. C'est de la folie? Mais non ! simplement de l'imagination. Comme le fut l'invention des nombres négatifs...

Appelons ce nombre imaginaire i (i comme... imaginaire) et décidons que sont carré est négatif et qu'il vaut -1.

$$i^2 = -1$$

2 Représentation

- Mais alors, combien vaut ce i ?

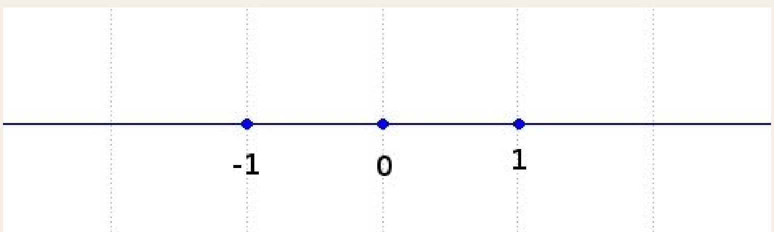
- Eh bien il vaut i et c'est tout ! ou encore $1 \times i$.

- Oui mais... ça ressemble à quoi un i imaginaire ?

- A quelque chose qui multiplié par lui même vaut -1

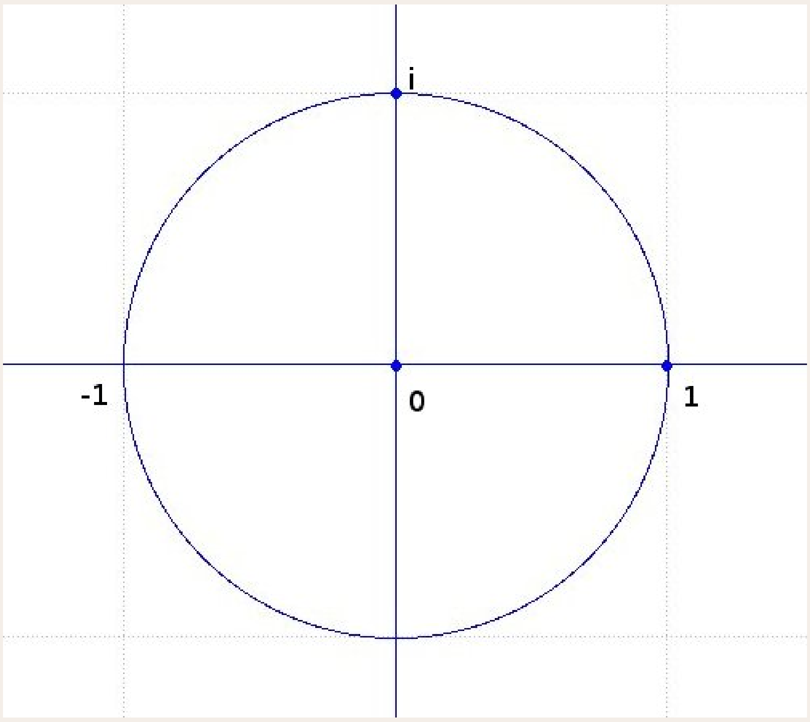
- Oui mais on aimerait quand même le voir ce nombre imaginaire nous !

- Bon d'accord, je vais le dessiner. Mais auparavant je dois vous dessiner l'image de 1, oui le nombre bien réel 1. On va le faire d'une façon géométrique. Traçons une droite horizontale pleine de points juxtaposés donc, chaque point représentant un nombre ordinaire, réel. Un de ces points représentera 0, et un autre un peu à sa droite représentera le nombre 1. Voila, avec une bonne loupe on peut voir 1.



Bon d'accord, mais il est où « i » sur cette droite? à gauche de 0 ? Non, à gauche de 0 ce sont les nombres négatifs. Le nombre imaginaire i n'est **PAS** sur cette droite !

Il se trouve sur une droite perpendiculaire ! Et on va voir pourquoi.



Nous avons vu plus haut que i vaut $1 \times i$ (une fois i) Si nous plaçons i sur la droite verticale à la même distance de 0 que le 1, (c'est à dire sur un cercle de centre 0 et passant par 1), on voit que le fait de multiplier 1 par i est l'équivalent, en partant de 1, de faire un quart de tour vers la gauche, pour trouver le résultat i.

Dès lors qu'on connait cette reccette pour multiplier par i, appliquons-la à i lui même pour voir... On part de i et on fait un quart de tour à gauche. On se retrouve sur la droite des nombres biens réels, sur le nombre (-1). On voit donc que ce *principe opératoire* de multiplication par i nous amène au résultat $(i) \times (i) = -1$ c'est à dire $(i)^2 = -1$

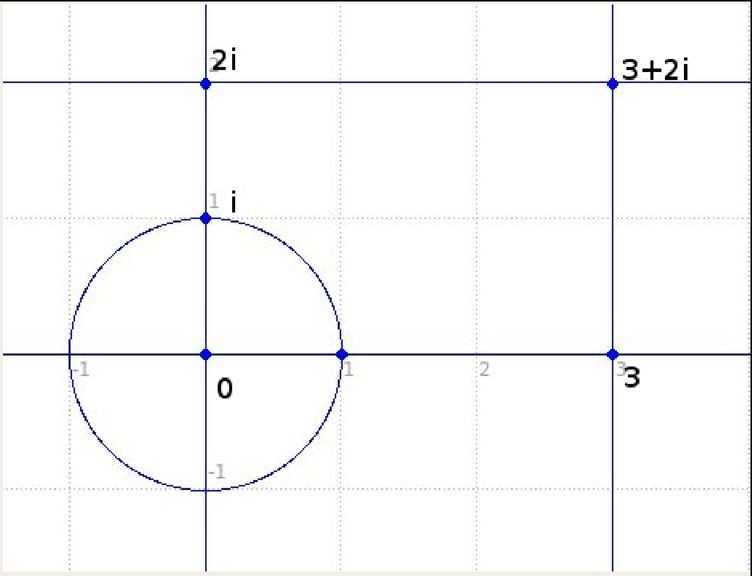
Cela correspond exactement au but recherché. On sait maintenant représenter i.

Maintenant si, partant de (-1), on fait un quart de tour vers la gauche, on se retrouve en bas sur la droite verticale, (la droite imaginaire). Et comme on peut écrire que $(-1) \times i = -i$ on voit que le point sur lequel on se trouve alors, au dessous de 0 représente $-i$. Donc cette droite perpendiculaire, cette droite imaginaire ressemble fort à la droite horizontale représentant les nombres réels à part son orientation... Ses points correspondent à des nombres imaginaires, multiples de i, comme $2i, 3i$ ... etc, ainsi que $-i, -2i, -3i$ etc... (ainsi que toutes les valeurs intermédiaires si on considère l'ensemble des nombres réels et non pas seulemennt les entiers naturels). Pour savoir où se trouve $2i$, il suffit de partir de 2 sur la droite des réels et de faire un quart de tour à gauche. On voit donc que par l'association de la procédure « faire un quart de tour à gauche » avec « la multiplication par i », en partant de TOUS les points de la droite horizontale, on trace en fait tous les points de la droite verticale. (« tous » signifie ici « autant qu'on le désire », les réels étant en nombre infini sur tout intervalle...) C'est ce qui justifie les appellations d'axe réel et axe imaginaire «pur » pour ces deux droites.

- Pur ? tiens donc! Il y a autre chose ? encore une complication !?

3 Les nombres complexes

Mais non, pire ! Une folie ! Un pas de plus pour l'imagination ! On vient de représenter deux ensembles de nombres bien distincts avec nos deux droites... Mais qu'en est-il des AUTRES points du plan (de la feuille sur laquelle sont tracées ces droites) ? Et s'ils représentaient eux aussi des nombres ? Oui mais quels types de nombres ? des nombres réels ? Non, eux ils sont tous sur la droite horizontale. Des nombres « imaginaires purs »? non plus, ils sont tous sur la droite verticale. Il s'agit d'une combinaison des deux. Et on les appellera des *nombres complexes*.



Chaque point sera défini par ses coordonnées a et b sur les axes réel et imaginaire et représentera un nombre complexe qui s'écrira :

$z = a + ib$

-Tiens nous avions appris à l'école qu'on ne peut pas ajouter des carottes et des salades?

- Hé bien ce n'était *pas tout à fait* vrai ! Avec un peu d'imagination on peut ! Mais le résultat n'est ni carottes ni salades, mais une combinaison des deux.

Voilà, tout (enfin le principal) est dit concernant la recette des nombres complexes, le reste c'est de la cuisine.

Mais quelle cuisine ! Une cuisine qui s'accommode extrêmement bien à notre plat de résistance qu'est l'électronique. Aussi elle mérite que nous l'étudions afin de pouvoir vraiment comprendre l'électronique (les lois de l'électricité dirons nous plus exactement, mais bon c'est un électronicien qui vous parle, alors…). C'est incontournable, l'électronique repose sur la physique (quantique parfois), et les lois de la nature nous apparaissent essentiellement mathématiques. Richard Feyman (et bien d'autres avant lui) l'avait souligné.

Autant dire, pour ceux qui sont allergiques aux maths, que mes propos vont rapidement devenir désagréables... On va parler vecteurs, trigonométrie, sinus et cosinus. Puis il faudra faire un détour par la fonction logarithme néperien et sa réciproque la fonction exponentielle afin de manier ces nombres complexes plus aisément, je dirais presque les doigts dans le nez !