Théorie de la relativité restreinte :

La Transformation de Lorentz

1 Description

Nous allons considérer deux référentiels galiléens (dits aussi « inertiels ») $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre donc, et un événement vu depuis ces deux référentiels.

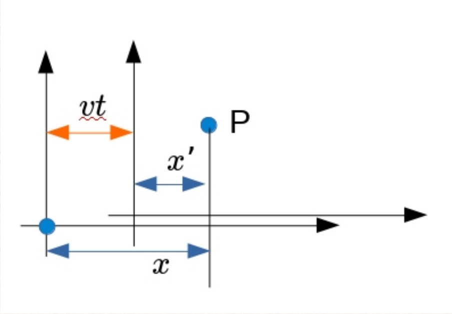
Rappel : *Un référentiel galiléen (ou référentiel inertiel) est un référentiel dans lequel tout corps libre (masse sur laquelle il ne s'exerce aucune force) est soit au repos (ses coordonnées ne changent pas au cours du temps), soit en mouvement rectiligne uniforme (vitesse constante en module et direction, donc pas d'accélérations ni de rotations).*

On suppose que tous les déplacements se font uniquement suivant l'axe des x afin de simplifier l'exposé et les graphiques.

2 Calcul en mécanique classique « newtonienne » :

Lorsque les vitesses en jeu peuvent être négligées devant la vitesse de la lumière, le calcul de la position d'un point dans les différents référentiels est très simple :

Supposons qu'au temps $t_0 = 0$ les deux référentiels coïncident. Au temps $t_1 = t$ le référentiel $\mathcal{R}'$ (tracé « en haut ») s'est déplacé à la vitesse v suivant l'axe des x par rapport à $\mathcal{R}$ (tracé au dessous), de la distance vt.

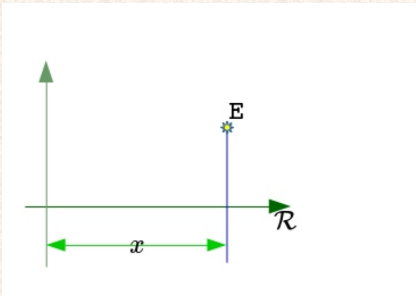


Si au temps t_1 la position de l'événement au point P est égale à x dans le référentiel $\mathcal{R}$, alors dans le référentiel $\mathcal{R}'$, elle vaut :

$x' = x - vt$

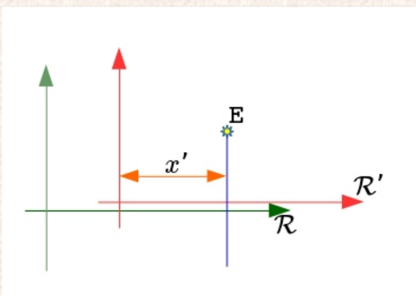
3 Calcul en théorie de la relativité restreinte :

Lorsque les vitesses ne sont plus négligeables devant c, le calcul est un peu plus compliqué :



Soit un événement E vu depuis un repère $\mathcal{R}$

Voici ce même événement vu depuis le repère $\mathcal{R}'$

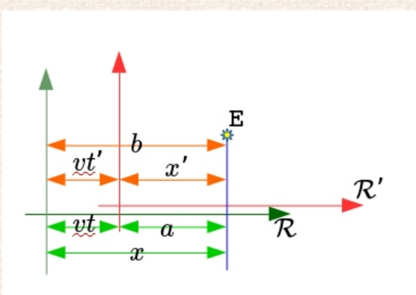


qui est en déplacement rectiligne uniforme

à une vitesse non négligeable devant c

suivant l'axe des x par rapport au repère $\mathcal{R}$.

Désignons par des lettres ordinaires les distances



mesurées du point de vue du repère $\mathcal{R}$,

et par des lettres complétées du signe *prime* ('),

les distances mesurées du point de vue du

repère $\mathcal{R}'$

Sur cette dernière figure les distances semblent être les mêmes vues depuis les deux repères (a semble égale à x' , vt semble égale à vt' et b semble égale à x). Mais comme les entités en question se déplacent à grande vitesse, leur valeurs numériques ne sont PAS égales lorsqu'elles sont mesurées depuis des référentiels différents.

En particulier, d'après ce que nous avons déjà calculé lors de notre première approche de la Théorie de la Relativité Restreinte, nous devons écrire :

$$a = x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$b = x\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

il s'ensuit :

$$x = vt + a$$

$$x = v\,t + x'\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (1)$$

$$x' = b - vt'$$

$$x' = x\sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' \qquad (2)$$

calcul de $x' = f(x, t)$:

(1)–> $x = vt + x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$

d'où :

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \text{ (A1)}$$

calcul de $t' = f(x, t)$

posons (afin de ne pas devoir écrire des tonnes de racines) :

$\alpha = \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$\alpha^2 = 1 - v^2/c^2$

de sorte que l'expressions de x' devient :

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\alpha}} \text{ (A2)}$$

(2) –>

$$\begin{aligned} x' &= x\alpha - vt' \\ vt' &= x\alpha - x' \\ &\quad \text{en remplaçant } x' \text{ par son expression } (A2): \\ &= x\alpha - \frac{x - vt}{\alpha} \end{aligned}$$

faisons un peu de cuisine niveau maternelle :

$$
\begin{aligned}
t' &= \left(x\alpha - \frac{x - vt}{\alpha}\right)/v \\
&= \frac{x\alpha}{v} - \frac{x - vt}{v\alpha} \\
&= \frac{x\,\alpha^2 - x - vt}{v\alpha} \\
&= \frac{x(1 - v^2/c^2) - x + vt}{v\alpha} \\
&= \frac{x - v^2x/c^2 - x + vt}{v\alpha} \\
&= \frac{vt - v^2x/c^2}{v\alpha} \\
&= \frac{t - vx/c^2}{\alpha}
\end{aligned}
$$

résultat, en remplaçant α par sa valeur :

$$\boxed{t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \quad \text{(B)}$$

Les équations (A) et (B) ci-dessus constituent les *TRANSFORMATIONS DE LORENTZ*.

Il est également commode, pour simplifier les calculs, de poser :

$\beta = v/c$ et

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ce qui donne pour γ en fonction de β :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

et réciproquement, pour β en fonction de γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= 1/\sqrt{1-\beta^2} \\ \sqrt{1-\beta^2} &= 1/\gamma \\ 1-\beta^2 &= 1/\gamma^2 \\ \beta^2 &= 1-1/\gamma^2 \end{aligned}$$

$$\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$$

Remarque :

$$\begin{aligned} \gamma &= 1/\sqrt{1-\beta^2} \\ \gamma\left(\sqrt{1-\beta^2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

d'où :

$\gamma^2(1-\beta^2)=1$

En utilisant ces notations, les transformations de Lorentz s'écrivent :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \gamma(x-\beta ct) \end{aligned}$$

Et pour le temps :

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \gamma(t-vx/c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct-cvx/c^2) \\ &= \gamma(ct-vx/c) \end{aligned}$$

$$= \gamma(ct - \beta x)$$

Récapitulation qui met une symétrie en évidence :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

Ces deux équations sont donc identiques par simple permutation de x et ct.

C'est ici qu'il apparaît que le temps et l'espace peuvent jouer un rôle presque identique dans la théorie. En fait il s'agit du produit du temps par la vitesse de la lumière c, ce qui est bien homogène à une longueur.

Nous verrons qu'il est possible de manipuler ensemble ces concepts de temps et d'espace dans les calculs, en créant des êtres mathématiques à trois dimensions d'espace et une de temps, des vecteurs à quatre composantes, les quadrivecteurs.

L'Espace-temps, et les intervalles d'espace-temps... Vous commencez sans doute maintenant à voir d'où proviennent ces notions...