Circulation d'un champ de vecteurs

1 Introduction

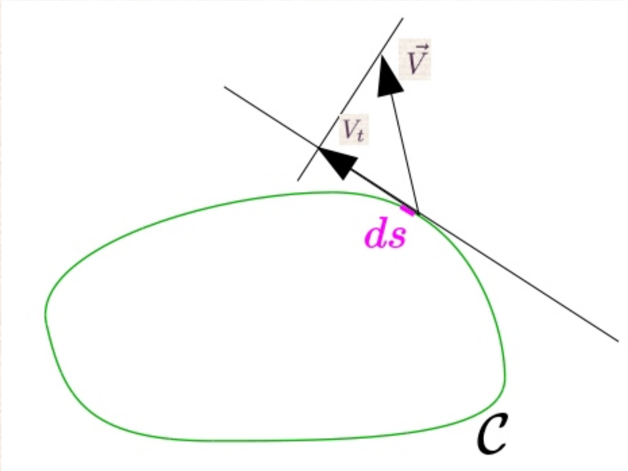
La circulation d'un champ de vecteurs est liée au rotationnel du champ, propriété que nous avons précédemment étudiée. Cette circulation va nous être utile pour démontrer que l'électromagnétisme est une théorie relativiste.

2 Définition de la circulation

Soit le champ vectoriel :

$\vec{V}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Considérons maintenant une courbe $\mathcal{C}$ imaginaire fermée dans l'espace, (une boucle, on parle aussi de chemin lorsque la courbe n'est pas fermée). Si le champ vectoriel est défini en tout point de l'espace, ces vecteurs sont définis pour tous les points de cette courbe. Et en chaque point de cette courbe, les vecteurs de l'espace vectoriel ont une composante tangentielle à la courbe.



On peut donc calculer l'intégrale de **toutes** ces composantes tangentielles à la courbe (c'est ce qu'on appelle une intégrale curviligne, qui est donc calculée sur l'intégralité de la courbe) :

$$\oint_{\mathcal{C}} V_t \, ds \;=\; \oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$\overrightarrow{ds}$ étant un élément infinitésimal du chemin.

V_t étant la projection du vecteur $\vec{E}$ sur la tangente à la courbe.

$\vec{V} \cdot \overrightarrow{ds}$ est le produit scalaire (point au milieu de la ligne, pas en bas) des vecteurs $\vec{V}$. $\overrightarrow{ds}$ est le produit de leur module par le cosinus de l'angle qu'ils font entre eux.

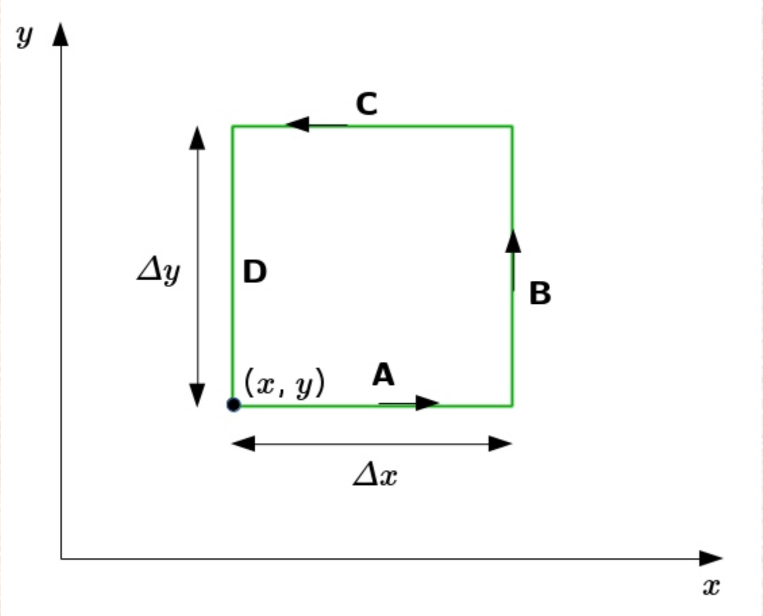
C'est cette intégrale curviligne que l'on appelle la circulation de l'espace vectoriel $\vec{E}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$. Cela peut correspondre à la circulation d'un liquide par exemple mais d'un point de vue mathématique la circulation est définie pour des champs vectoriels même lorsque rien de matériel ne « circule » (comme par exemple dans le cas d'un champ magnétique).

3 Relation entre la circulation et le rotationnel

3.1 Calcul sur un élément de surface infinitésimal

Considérons un élément de surface carré infinitésimal dans un espace ou est défini le champs vectoriel $\vec{V}$. Cet élément de surface est délimité par une courbe, en l'occurrence un chemin carré fermé.

Afin de grandement simplifier les calculs, choisissons judicieusement l'orientation de notre carré dans l'espace : dans le plan $x0y$ avec ses côtés parallèles aux axes x et y.



Calculons la circulation de $\vec{V}$ le long de ce carré.

L'intégrale curviligne $\oint_C \vec{V} \cdot \vec{ds}$ du produit scalaire se résume ici à une somme de quatre termes correspondants au quatre côtés **A, B, C, D** du carré.

$$\oint_C \vec{V} \cdot \vec{ds} \;=\; V_{x_A}\Delta x + V_{y_B}\Delta y - V_{x_C}\Delta x - V_{y_D}\Delta y \qquad (1)$$

expression dans laquelle V_{x_A} désigne la *composante en* x (projection) du vecteur $\vec{V}$ concernant le côté A, plus précisément le vecteur au point $(x,\, y)$ et ainsi de suite pour les trois autres. Les signes indiquent le sens de parcours de chaque côté lorsque l'on tourne toujours dans le même sens (ici le sens trigonométrique).

Nous pouvons considérer, puisque notre carré est par définition de taille infinitésimale, que les composantes V_{x_A} et V_{x_C} du vecteur $\vec{V}$ sont liées par la relation suivante :

$$V_{x_C} \;=\; V_{x_A} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\Delta y$$

de même pour les composantes V_{y_B} et V_{y_D}

$$V_{y_B} \;=\; V_{y_D} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\Delta x$$

Dans (1), les termes $V_{x_A}\Delta x - V_{x_C}\Delta x$ deviennent :

$$\begin{aligned} V_{x_A}\Delta x - V_{x_C}\Delta x &= (V_{x_A} - V_{x_C})\Delta x \\ &= \left(V_{x_A} - V_{x_A} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\Delta y \right)\Delta x \\ &= -\frac{\partial V_x}{\partial y}\Delta x . \Delta y \end{aligned}$$

de même les termes $V_{y_B}\Delta\, y - V_{y_D}\Delta\, y$ deviennent :

$$\begin{aligned} V_{y_B}\Delta y - V_{y_D}\Delta y &= (V_{y_B} - V_{y_D})\Delta\, y \\ &= \left(V_{y_D} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\Delta x - V_{y_D}\right)\Delta\, y \\ &= \frac{\partial V_y}{\partial x}\Delta x\,.\Delta\, y \end{aligned}$$

Au total, la circulation a comme valeur :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{V}\cdot\vec{ds} &= \frac{\partial V_y}{\partial x}\Delta x\,.\Delta y - \frac{\partial V_x}{\partial y}\Delta x\,.\Delta\, y \\ &= \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\Delta x\,.\Delta y \end{aligned}$$

Nous remarquons que $dx\,.dy$ représente l'aire du petit carré ($\Delta x\,.\Delta y = \Delta a$), mais ce n'est pas tout : le facteur $\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$ lui aussi nous est connu ! C'est exactement la composante suivant l'axe z du rotationnel de $\vec{V}$, telle que nous l'avions calculée lors de l'étude du rotationnel.

$$\mathrm{rot}\,\vec{V_z} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

Et cette composante suivant l'axe des z est donc la composante du rotationnel de $\vec{V}$ **normale** à notre petite surface.

On peut en déduire que *quel que soit l'orientation de la surface*, le seul facteur à prendre en compte dépendant du champ vectoriel sera toujours la composante normale à la surface du rotationnel du champ vectoriel à l'endroit considéré.

Donc, concernant une surface infinitésimale, nous écrirons :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{ds} \;=\; \left(\mathrm{rot}\,\vec{V_z}\right)_n \times \Delta a$$

l'indice $()_n$ signifie « la composante normale de ».

La circulation de tout vecteur $\vec{V}$ le long d'un carré infinitésimal est le produit de [la composante normale à la surface du rotationnel de $\vec{V}$] par [l'aire Δa du carré].

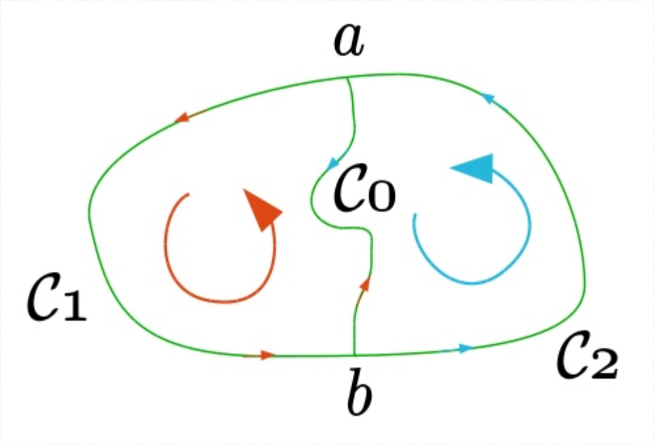
Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface, il vient :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{ds} \;=\; (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n}\, \Delta a$$

Ce qui se dit : La circulation de tout vecteur $\vec{V}$ le long d'un carré infinitésimal est [le produit scalaire du rotationnel de $\vec{V}$] par [le vecteur unitaire normal au carré multiplié par l'aire du carré Δa].

3.2 Généralisation pour une surface quelconque

Reprenons notre courbe de départ et voyons ce qui se passe lorsqu'on la fragmente en deux courbes juxtaposées (ayant un segment commun) :



La circulation suivant la courbe globale reste inchangée :

$$\text{circulation}\,(\vec{V})_c \;=\; \oint_{\mathcal{C}} V_t\, ds$$

Calculons les circulations dans chacune des petites courbes.

La courbe de gauche est composée du chemin C_1 et du chemin C_0 (commun aux deux courbes).

Sa circulation est donc :

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_{\text{gauche}}} V_t\, ds_{\text{gauche}} &= \oint_{\mathcal{C}_{\text{gauche}}} V_t\,(ds_1 + ds_0)\\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} V_t\, ds_1 + \oint_{\mathcal{C}_0} V_t\, ds_0\end{aligned}$$

ds_1désignant les éléments infinitésimaux du chemin C_1 et ainsi de suite.

La courbe de droite est composée du chemin C_2 et du chemin C_0.

Sa circulation est donc :

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_{\text{droite}}} V_t\, ds_{\text{droite}} &= \oint_{\mathcal{C}_{\text{droite}}} V_t\,(ds_2 - ds_0)\\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} V_t\, ds_2 - \oint_{\mathcal{C}_0} V_t\, ds_0\end{aligned}$$

Pourquoi le signe $(-)$ dans cette seconde expression ? Parce que cette fois le segment commun est parcouru dans le sens opposé à celui employé pour le parcours précédent.

Calculons la somme de ces deux circulations :

$$\begin{aligned}\text{circulation droite} + \text{circulation gauche} &= \oint_{\mathcal{C}_1} V_t\, ds_1 + \oint_{\mathcal{C}_0} V_t\, ds_0 + \oint_{\mathcal{C}_1} V_t\, ds_2 - \oint_{\mathcal{C}_0} V_t\, ds_0\\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} V_t\, ds_1 + \oint_{\mathcal{C}_1} V_t\, ds_2\\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} V_t\, ds_1 + V_t\, ds_2\\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} V_t(\, ds_1 + ds_2)\\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} V_t ds\\ &= \text{circulation le long de la courbe extérieure}\end{aligned}$$

Donc pour connaître la circulation le long d'une boucle quelconque, on peut la découper en deux boucles plus petites et faire la somme des circulations. Et le procédé peut être répété pour chacune des petites boucles : Fractionnement en deux boucles plus petites puis sommation des intégrales curvilignes...

Une grande boucle pourra ainsi être fractionnées en un grand nombre de petites boucles infinitésimales qui s'appuieront sur la boucle principale.

Ce résultat est très intéressant parce qu'on venait justement d'apprendre à calculer la valeur de la circulation le long d'une boucle infinitésimale (carrée).

Dès lors si l'on a affaire à une grande boucle, on peut considérer la surface qu'elle délimite, puis découper cette surface en un grand nombre de surfaces carrées infinitésimales et calculer la somme des circulations.

Nous obtenons le théorème de Stokes :

Théorème. *de STOCKES :*

$$\oint_c \vec{V} \cdot ds \; = \; \iint_s (\nabla \wedge \vec{V})_n \, da$$

ds est un segment infinitésimal de la courbe.

da est une surface infinitésimale, partie de S.

S est une surface s'appuyant sur la boucle C

On a affaire à une intégrale double puisque nous intégrons sur une surface.

l'indice $()_n$ signifie « la composante normale de ».