Les ondes électromagnétiques (1)

1 Rappel des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}}: \quad \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && (1)\\
\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}}: \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{E}} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{B}} && (2)\\
\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{B}}: \quad \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{B}} &= 0 && (3)\\
\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{B}}: \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{B}} &= \mu_0\Big[\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{E}}\Big] && (4)
\end{aligned}$$

Rappels :

$\wedge$ désigne le produit vectoriel.

∇ (nabla) est l'opérateur vectoriel de dérivation du premier ordre.

$\nabla\wedge\vec{\boldsymbol{E}}$ c'est le rotationnel du champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{E}}$, noté aussi $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}}$.

$\vec{\nabla}^2=\Delta$ est le « laplacien vectoriel » opérateur de dérivation vectoriel du second ordre

2 Les champs électrique et magnétique loin de toutes charges

Nous allons nous intéresser à ce qui se passe lorsque des champs électriques et magnétiques se trouvent dans le vide à grande distance de toute charge électrique et de tout courant électrique, de façon à pouvoir négliger ces termes dans les équations, c'est à dire que nous considérons que $\rho = 0$ et que $\vec{j} = 0$.

donc :

(1) devient $\rightarrow$

$$\vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{5}$$

comme $j = 0$ et que $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c_2}$:

(4) devient $\rightarrow$

$$\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{E}} \tag{6}$$

Nous entrevoyons déjà que les équations (2) et (4) vont interagir, puisqu'elles indiquent que les variations d'un champ agissent sur l'autre et vice-versa.

2.1 Le champ électrique :

prenons le rotationnel de (2)

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{E}}) &= \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{B}}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{B}}) \qquad (7) \end{aligned}$$

(7) et (6) donnent :

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{E}}) &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{E}}\right) \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} \qquad (8) \end{aligned}$$

rappel : $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{E}}) = \nabla(\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{E}}) - \Delta\vec{\boldsymbol{E}}$

(8) devient :

$$\nabla(\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}}) - \Delta\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

(8) et (5) $\left(\ \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}} = 0\ \right)$ donnent :

$$\Delta\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$$

Ce qui aboutit à l'équation d'onde suivante :

$$\Delta\vec{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} = 0 \qquad (9)$$

Remarque :

Cette équation est fondamentale. On définit d'ailleurs un nouvel opérateur : le d'alembertien :

$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ c.à.d: $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

ou comment représenter une onde par un carré !!

Ce petit détour par le d'alembertien nous rappelle que le laplacien signifie en fait que nous opérons dans l'espace à trois dimensions, que le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ est représenté par un vecteur à trois composantes (E_x, E_y, E_z) et donc que la dérivée seconde de $\vec{\boldsymbol{E}}$ se décompose en trois dérivées partielles, ordinaires, suivant $x, y \,\mathrm{et}\, z$.

Nous avons déjà rencontré une équation similaire lors de l'étude des équations différentielles du second ordre et du circuit LC (inductance-capacité) :

$$u'' - \omega^2 u = 0$$

dont nous connaissons l'ensemble des solutions:

$$u(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$$

Nous devons donc nous attendre à des solutions similaires pour notre champ électrique, avec des oscillations possibles dans les trois dimensions de l'espace.

Toutefois notre équation d'onde est différente en ce sens que le laplacien correspond à une dérivée *seconde spatiale* du champ, et qu'il figure dans l'équation une autre dérivée seconde *temporelle* cette fois. Nous obtiendrons donc sans doute des oscillations dans l'espace ET dans le temps. D'où l'appellation *équation d'onde*. Nous y reviendrons.

Mais ne brûlons pas les étapes. Les équations de Maxwell nous parlent aussi du champ magnétique. Que se passe-t-il en ce qui le concerne ?

2.2 Le champ magnétique :

prenons le rotationnel de (6)

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{B}}) = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{E}}\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{E}}) \tag{10}$$

(10) et (2) donnent :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{B}}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{B}}\right)$$

avec $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{B}}) = \nabla(\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{B}}) - \Delta\vec{\boldsymbol{B}}$

$$\nabla(\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{B}}) - \Delta\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{B}}\right) \tag{11}$$

(11) et (3) $\left(\ \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{B}} = 0\ \right)$ donnent :

$$\Delta\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\boldsymbol{B}}$$

Ce qui aboutit à l'équation d'onde suivante :

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Nous obtenons la même équation pour le champ magnétique $\vec{B}$ que celle obtenue pour le champ électrique $\vec{E}$!

Il nous reste maintenant à calculer les solutions de ces équations d'onde.

Ce sera l'objet de l'article suivant.