Le rotationnel du rotationnel

Le calcul vectoriel nous a amené à définir :

- Le **flux** d'un champ de vecteur à travers une surface délimitée par une courbe fermée.
- La **divergence** d'un champ de vecteurs : $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\nabla}.\vec{\boldsymbol{E}}$
- Le **rotationnel** d'un champ de vecteurs : $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\boldsymbol{E}}$
- Le **laplacien** scalaire et le laplacien vectoriel $\Delta\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\nabla}^2\vec{\boldsymbol{E}}$

Nous allons maintenant calculer une relation entre le laplacien, la divergence et le rotationnel qui nous sera bien utile pour retrouver la fonction de propagation des champs électriques et magnétiques sous forme d'ondes électromagnétiques à partir des équations de Maxwell.

Soit donc un champ vectoriel $\vec{\boldsymbol{E}}\colon \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

dont les vecteurs ont comme composantes des fonctions de (x, y, z):

$$\vec{\boldsymbol{E}}\begin{cases} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{cases}$$

Le rotationnel de $\vec{\boldsymbol{E}}$ s'écrit :

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y \\ \frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z \\ \frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x \end{cases}$$

Jusqu'ici rien que nous n'ayons déjà vu.

Prenons maintenant le rotationnel de ce rotationnel :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$$

et calculons ses composantes:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_x &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) \\
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_y &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) \\
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right)
\end{aligned}$$

ça peut paraître laborieux à écrire à la main, alors qu'avec une traitement de texte dédié à Latex (tel TexMax que j'utilise sous Linux, c'est de la rigolade: il suffit de faire quelques « copier-coller » avec un risque minimum de se tromper).

Développons des expressions et regroupons les opérateurs:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_x &= -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}E_x - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}E_x + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}E_z \\
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_y &= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}E_y + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}E_z + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}E_x \\
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_z &= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}E_z - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}E_z + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}E_x + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}E_y
\end{aligned}$$

simplifions un peu les écritures :

$$\begin{aligned}
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x] &= -\frac{\partial^2}{\partial y^2}E_x - \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}E_y + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}E_z \qquad (1) \\
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_y &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y - \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_y + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}E_z + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}E_x \\
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_z &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z - \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_z + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}E_x + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}E_y
\end{aligned}$$

Ne considérons pour l'instant que la première composante (1) et ajoutons puis soustrayons-lui le terme $\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x$

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_x &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x - \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_x - \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}E_y + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}E_z + \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x - \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_x - \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z + \frac{\partial}{\partial x}E_x\right)
\end{aligned}
$$

les termes négatifs $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x - \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_x - \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x$ forment le laplacien (scalaire) de la composante E_x.

rappel : Le laplacien scalaire d'une fonction $f(x,y,z)$ est $\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Ainsi nous obtenons :

$$
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z\right) - \Delta E_x
$$

or la divergence de $\vec{E}$ est :

$\mathrm{div}\,(\vec{E}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z$ ce qui correspond aux termes positifs (entre parenthèses) restants ci-dessus. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
[\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})]_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta E_x \\
&= \overrightarrow{\nabla_x}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta E_x
\end{aligned}$$

précisons les choses :

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ = divergence de $\vec{E}$ est un produit scalaire, le résultat est un scalaire.

$\overrightarrow{\nabla_x}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})$ est aussi un scalaire

le même calcul sur les autres composantes nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})_y &= \overrightarrow{\nabla_y}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta E_y \\
\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})_z &= \overrightarrow{\nabla_z}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta E_z
\end{aligned}$$

Regroupons ces trois composantes :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = \begin{cases} \overrightarrow{\nabla_x}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta E_x \\ \overrightarrow{\nabla_y}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta E_y \\ \overrightarrow{\nabla_z}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta E_z \end{cases} = \vec{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta E$$

Nous retiendrons :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) \;=\; \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

la même chose, écrite différemment :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{E}}) \;=\; \nabla(\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{E}}) - \Delta\vec{\boldsymbol{E}}$$

Nous avons maintenant à notre disposition tous les outils mathématiques qu'il faut pour démontrer par le calcul, à partir des équations de Maxwell, que les champs électriques et magnétiques variables, une fois créés, se propagent dans le vide loin de toute matière. Toutefois nous verrons qu'ils sont produits, au départ, par le déplacement de charges.

Ce sera l'objet de l'article suivant sur la propagation des ondes électromagnétiques.