

Les Equations de maxwell

Maintenant que nous savons ce qu'est :

- un champ vectoriel
- le flux
- la divergence
- le rotationnel

nous pouvons écrire les fameuses Equations de Maxwell. Les voici :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (4)$$

\vec{E} → le champ électrique

$\rho \rightarrow$ la densité de charge électrique

$\vec{B} \rightarrow$ le champ magnétique

$\epsilon_0 \rightarrow$ un coefficient (la permittivité du vide)

$\vec{j} \rightarrow$ le vecteur densité de courant électrique

$c^2 \rightarrow$ le carré de la vitesse de la lumière

Ces équations définissent les interactions entre les charges, les courants, les champs électriques, et les champs magnétiques qu'ils soient constants ou variables dans le temps. D'autres physiciens (Gauss, Thomson (= Lord Kelvin), Ampère, Faraday) les avaient découvertes avant lui lors d'expériences variées et séparées, mais c'est Maxwell qui les a réunies sous cette forme dans un corpus mathématique cohérent et concis.

Unification :

En cela James Clerk Maxwell a contribué à l'unification de l'électricité et du magnétisme en une même théorie : **l'électromagnétisme**. C'est la deuxième grande unification après celle de la pesanteur (chute des corps) et du mouvement des astres (Kepler) par Newton. Plus près de nous citons l'unification électrofaible entre la théorie de l'interaction faible et l'électromagnétisme, bien qu'il ne s'agisse pas d'une véritable unification (elles ne partagent pas les mêmes constantes de couplages). Suivra le regroupement de la théorie électrofaible et de la chromodynamique quantique au sein du modèle standard. La tendance à toujours plus d'unification débouchant sur toujours moins de paramètres libres au sein des théories regroupées semble toutefois marquer le pas actuellement : La théorie des cordes qui est une des principales prétendante à l'unification de la mécanique quantique avec la relativité générale (avec la théorie de la gravitation quantique à boucles) débouche au contraire sur une explosion des paramètres libres et sur un nombre incalculable (on parle de 10^{500}) variantes possibles (voire un continuum) de théories, ce qui peut paraître déstabilisant à nos esprits cartésiens. Mais vu sous un autre angle cela est fortement enthousiasmant puisque permettant l'émergence d'un multivers dont le paysage cosmique (pour reprendre le titre en français d'un livre de

Leonard Susskind) constitué d'une multitude d'Univers aux lois variées, et conséquence des théories actuellement admises (relativité, mécanique quantique pour n'en citer que deux qui ne soient pas simplement spéculatives mais avérées) et non simplement issu de l'imagination humaine comme l'ont été bien des mythologies et autres religions. En quoi ce Multivers est-il enthousiasmant ? En ce qu'il explique (par un simple calcul de probabilité) l'extraordinaire précision du « réglage » des paramètres physiques régissant les lois de notre Monde et rendant sa diversité et l'émergence de la vie possible. D'autres explications ont été proposées : un coup de dé initial à la probabilité quasiment nulle, ou une intervention extérieure, divine donc. Ce dernier choix, bien que le plus répandu, constitue une abdication de l'intelligence, dont on a constaté les ravages au cours des âges (je cite ici de mémoire les propos d'Aurélien Barrau). Il est clair que ce n'est pas le mien.

Revenons à nos équations de Maxwell :

L'équation (1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ nous dit que la divergence du champ électrique E à travers une surface fermée délimitant un volume contenant une charge électrique est égale à la charge électrique intérieure divisée par ϵ_0 . Nous l'avons démontrée. Dans cette équation la charge électrique peut être considérée comme « émettant » le champ électrique. La charge électrique est une source de champ magnétique.

L'équation (2) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ nous dit que le rotationnel du champ électrique E est égal la dérivée par rapport au temps du champ magnétique, c'est à dire aux variations dans le temps du champ magnétique : La variation d'un champ magnétique crée un champ électrique (tournant autour). En revanche un champ magnétique constant ne produit pas de champ électrique (un alternateur doit tourner pour produire du courant électrique, et les éoliennes ne produisent de l'électricité que lorsqu'il y a du vent).

L'équation (3) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ nous dit que la divergence d'un champ magnétique est toujours nulle. Si on la compare à l'équation (1) on voit que cela revient à dire que contrairement à ce qui se passe pour le champ électrique, il n'existe pas de « charge » de champ magnétique, pas de monopole magnétique. Les lignes de champ magnétique se referment toujours sur elles même. Si on coupe un aimant en deux, on obtient deux aimants avec chacun son pôle nord et son pôle sud. En fait le champ magnétique n'est que la conséquence (relativiste qui plus est) de la variation d'un champ électrique. C'est l'objet de (la moitié de) la quatrième équation.

L'équation (4) $c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans son premier terme $\frac{\vec{j}}{\epsilon_0}$ nous dit qu'un courant électrique (une densité de courant électrique \vec{j}) produit un champ magnétique (tournant autour du courant). Un conducteur parcouru par un courant électrique fait bouger l'aiguille d'une boussole. Le second terme $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ indique qu'une variation (dans le temps) du champ électrique produit également un champ magnétique. C'est ce qui se passe entre les plaques d'un condensateur en train de se charger par exemple.

Les équations (2) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et (4) $c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ qui lient chaque champ aux variations de l'autre vont nous permettre d'expliquer ce qu'est **un champ électromagnétique**, son caractère ondulatoire et sa propagation dans l'espace. Nous verrons cela prochainement.

Remarque.

Nous avons écrit que $\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2$ c.a.d $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ (voir page : Flux d'un champ vectoriel)

Nous pouvons donc écrire l'équation (4) $\boxed{c^2\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{j}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Revoici donc notre quatrième équation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad (5)$$

Les équations de Maxwell (1) et (3), dans lesquelles le temps n'intervient pas, permettent d'expliquer et de calculer tous les phénomènes électrostatiques et magnéto-statiques (pour lesquels les charges sont immobiles et de valeur constante et les courants constants). Les équations (2) et (4) qui font intervenir le temps sous forme des variations dans le temps des grandeurs E et B permettent d'y ajouter les lois de l'électromagnétisme qui décrivent les interactions entre les effets électriques et les effets magnétiques. En résumé tout l'électromagnétisme est contenu dans ces quatre équations.

Nous allons donc pouvoir nous intéresser au champ électromagnétique et à sa propagation dans l'espace vide. Mais pour ce faire il nous manque encore un petit outil mathématique, que nous allons étudier maintenant : **le laplacien** qui est un opérateur de dérivation vectoriel du second ordre.