Série de Fourier(2)

Etude analytique

Nous avons entrevu graphiquement qu'il est possible de décomposer n'importe quelle fonction périodique répondant aux conditions de Dirichlet en une somme (infinie) de fonctions sinusoïdales de fréquences multiples de celle de la fonction de départ, cet ensemble de fonctions formant ce qu'on appelle un développement en série de Fourier. En pratique, on peut se contenter d'une suite finie de composantes pour approcher la fonction avec une précision voulue.

1 Intérêt du développement en série de Fourier

Lorsqu'un signal périodique de forme quelconque est appliqué à l'entrée d'un système linéaire, il en ressort déformé si la fonction de transfert complexe n'est pas purement réelle. Mais un signal sinusoïdal pur, lui, ne sera pas déformé, il reste une sinusoïde pure à la sortie, de même fréquence. Cette sinusoïde n'aura pas forcément la même amplitude ni la même phase, mais la fréquence et la forme sont conservées.

Dès lors, le développement du signal en série de Fourier permet d'effectuer les calculs sur des sinusoïdes en les multipliant simplement et séparément par la fonction de transfert complexe du système. Pour connaître le signal en sortie, il suffit d'additionner ces différentes composantes sinusoïdales ainsi traitées.

D'autre part la décomposition des signaux en série de Fourier permet d'obtenir ce qu'on appelle le spectre du signal, formé par l'ensemble des composantes sinusoïdales, et représenté par des raies discrètes situées à des fréquences multiples de la fondamentale, appelées harmoniques. Et la connaissance de ce spectre permet d'évaluer la bande passante nécessaire au système lorsqu'il s'agit de transmettre le signal incident sans déformation.

Le développement en série de Fourier permet également d'analyser les systèmes de modulation et de transmission de données.

En électronique, la distorsion qui résulte de l'atténuation ou de la suppression de certains harmoniques (substantif masculin) de rang élevé est appelée distorsion harmonique.

2 Etude analytique:

La décomposition d'une fonction $f(t)$ en série de Fourier s'écrit (en prenant t, le temps comme variable, mais ça peut être x vaiable d'espace dans le cas de traitement d'images par exemple, ou une autre variable) :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

$$\text{avec } n \in \mathbb{N} \; (n = \text{entier})$$

$T = \frac{1}{F}$ étant la période de la fonction $f(t+T) = f(t)$

et $\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$ la « pulsation »

On peut aussi l'écrire sous forme exponentielle complexe :

$$f(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

j étant l'imaginaire pur, $j^2 = -1$ (j est le i des mathématiciens)

2.1 Calcul du coefficient a_0

Commençons par la forme en $\sin$-$\cos$:

Nous partons de la définition :

$$f(t) \;=\; a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

Pour le coefficient a_0 rien de plus simple, il suffit d'intégrer $f(t)$ sur un intervalle égal à une période, tous les termes sinusoïdaux s'annulent, il reste a_0 qui est la valeur moyenne de la fonction :

$$
\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\,dt &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right] \right] dt \\
&= \int_0^T a_0 \,.dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T [a_n \cos(n\omega t)] dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T [b_n \sin(n\omega t)] dt \\
&= \int_0^T a_0 \,.dt + 0 + 0 \\
&= [a_0 \,.t]_0^T \\
&= a_0 T - 0 \\
&= a_0 T
\end{aligned}
$$

Nous obtenons ainsi la valeur du coefficient a_0 :

$$
a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt
$$

J'avoue que j'ai décomposé toutes les étapes rien que pour le plaisir de voir toutes ces belles intégrales ! En fait le résultat était évident dès le départ.

Remarque : Le calcul peut se faire sur n'importe quel intervalle de longueur d'une période, $[t_i, t_i + T]$ et pas seulement $[0, T]$

Précisons le seul point signifiant de ce calcul, à savoir l'intégrale définie de la fonction sinus sur une période :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin(n\omega t)\,dt &= \left[-\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^T \\
&= -\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega T) - \left(-\frac{1}{n\omega}\cos(0)\right) \\
&= -\frac{1}{n\omega}\times 1 + \frac{1}{n\omega}\times 1 \\
&= -\frac{1}{n\omega} + \frac{1}{n\omega} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pourquoi $\cos(n\omega T) = 1$?

T est la période; $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Dès lors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \cos(n\omega T) &= \cos(n\omega \times \frac{2\pi}{\omega}) \\ &= \cos(n \times 2\pi) \end{aligned}$$

Or la fonction cosinus est périodique de période 2π et $\cos(0) = 1$

ainsi que :

$\cos(0 + 2k\pi) = 1$

J'ai détaillé ce point parce qu'il sera réutilisé pour le calcul des autres coefficients.

De même nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(n\omega t)\, dt &= \left[\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^T \\ &= \frac{1}{n\omega}\sin(n\omega T) - \frac{1}{n\omega}\sin(0) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n\omega} \times 0 - \frac{1}{n\omega} \times 0$$

$$= 0$$

Car $\sin(0 + 2k\pi) = 0$

2.2 Calcul des coefficients a_n et b_n

Pour les électroniciens et autre radio-amateurs, je ne résiste pas à l'envie de dévoiler que nous allons utiliser le principe de la démodulation synchrone pour chacune des harmoniques, en multipliant le signal par une fonction sinus de fréquence n-multiple de la fondamentale, suivie par une intégration. Mais on va le faire mathématiquement :

Rappel:
$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$
$\sin a \times \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$
$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

Multiplions donc notre fonction par $\cos(p\omega t)$ et intégrons :

$$\int_0^T f(t)\cos p\omega t.dt \;=\; \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\omega t\right) + b_n \sin\left(n\omega t\right)\right] \right] \cos p\omega t\,.\,dt$$

$$= \int_0^T a_0 \cos(p\omega t).\mathrm{dt} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T a_n \cos(p\omega t).\cos\left(n\omega t\right).\,dt + \int_0^T b_n \cos(p\omega t)\sin\left(n\omega t\right).dt \right)$$

On voit immédiatement que le premier terme est nul (voir calculs précédents)

il reste :

$$\int_0^T f(t)\cos p\omega t.dt \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T a_n \cos(n\omega t).\cos\left(p\omega t\right).\,dt + \int_0^T b_n \sin(n\omega t)\cos(p\omega t).dt \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \int_0^T \left[\cos(n+p)\omega t + \cos(n-p)\omega t\,\right] dt + \frac{b_n}{2} \int_0^T \left[\sin(n+p)\omega t + \sin(n-p)\omega t\,\right].dt \right)$$

Deux cas sont à envisager :

2.2.1 Cas $n \neq p$

Si $n \neq p$ alors tout s'annule. En effet on peut poser $n+p=k_1$ et $n-p=k_2$ et on retombe dans des calculs vu plus haut à savoir que les intégrales sur l'intervalle T de toutes ces sinusoïdes et cosinusoïdes s'annulent.

Si $n=p$, il n'en va pas de même :

2.2.2 Cas n=p:

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\cos n\omega t.dt &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\int_0^T[\cos 2n\omega t+\cos 0\,]\,dt+\frac{b_n}{2}\int_0^T[\sin 2n\omega t+\sin 0\,]\,dt\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\int_0^T[\cos 2n\omega t+1\,]\,dt+\frac{b_n}{2}\int_0^T[\sin 2n\omega t+0\,]\,dt\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\int_0^T\cos 2n\omega t.\mathrm{dt}+\frac{a_n}{2}\int_0^T\mathrm{dt}+\frac{b_n}{2}\int_0^T\sin 2n\omega t.dt\right)\\
&= \frac{a_n}{2}\times 0+\frac{a_n}{2}[t\,]_0^T+\frac{b_n}{2}\times 0\\
&= \frac{a_n}{2}[t\,]_0^T\\
&= \frac{T}{2}a_n
\end{aligned}$$

Donc le fait de multiplier par $\cos(n\omega t)$ permet de trouver les coefficients a_n qui valent donc :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t).dt$$

Je vous laisse calculer les coefficients b_n en multipliant cette fois par $\sin(n\omega t)$ et vous obtiendrez :

$$b_n \ = \ \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin{(n\omega t)}.dt$$

2.3 Fonctions paires et impaires :

Une fonction $f(x)$ est dite paire si $f(-x) = f(x)$

Elle est dite impaire si $f(-x) = -f(x)$

(Une fonction peut n'être ni paire ni impaire)

Les fonctions impaires se décomposent en séries de Fourier ne comprenant que des termes en sinus.

Les fonctions paires se décomposent en séries de Fourier ne comprenant que des termes en cosinus plus éventuellement le terme constant.

Dans les articles suivants nous utiliserons ces nouvelles connaissances pour calculer le développement en série de Fourier de quelques fonctions courantes.