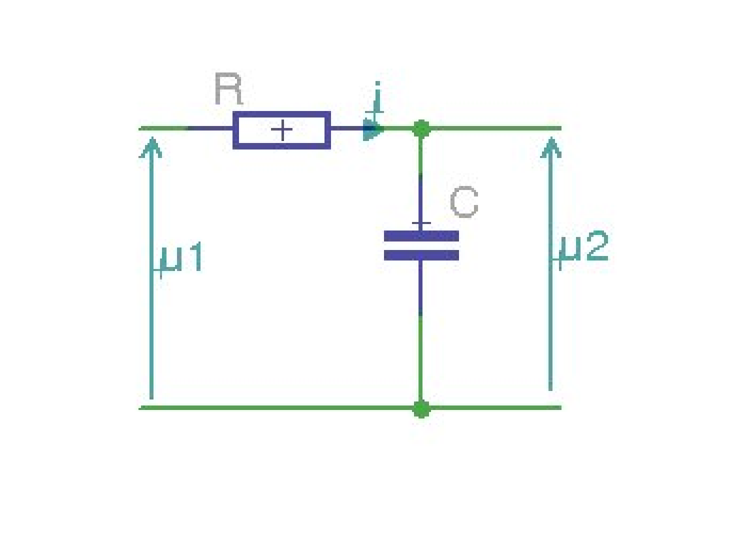
Filtre RC - passe bas d'ordre 1



Soit le quadripole ci-contre constitué d'une résistance en série et d'un condensateur en parallèle. C'est u filtre passe bas du premier ordre, comme nous allons le voir.

1 Calcul de la fonction de transfert :

soit $u_1 = Ue^{j\omega t}$

Si la sortie n'est pas chargée (aucune charge connectée en sortie, ou une charge de très grande impédance qui ne perturbe pas le filtre, par exemple celle présentée par un étage à amplificateur opérationnel) le courant i est le même dans la résistance et le condensateur. De ce point de vue, ces deux éléments sont connectés en série et dans ce cas on peut ADDI-

TIONNER leurs impédances complexes afin de connaitre l'impédance équivalente vue de l'entrée qui est donc égale à $Z_r + Z_c = \mathrm{R} + \frac{1}{j\omega \mathrm{C}}$

On peut alors calculer le courant i en fonction de la tension appliquée u_1

$$i = \frac{u_1}{\mathrm{R} + \frac{1}{j\omega\,\mathrm{C}}}$$

La tension de sortie du filtre, u_2 qui est la tension aux bornes du condensateur, est égale au produit de ce courant par l'impédance complexe du condensateur:

$$u_2 = u_1 \frac{1/j\omega\,\mathrm{C}}{\mathrm{R} + 1/j\omega\,\mathrm{C}}$$

La fonction de transfert complexe T du filtre est égale au rapport de u_2/u_1

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \frac{u_2}{u_1} \\ &= \frac{1/j\omega\,\mathrm{C}}{\mathrm{R} + 1/j\omega\,\mathrm{C}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1/j\omega\,\mathrm{C}}{R+1/j\omega\,\mathrm{C}} \times \frac{j\omega\,\mathrm{C}}{j\omega\,\mathrm{C}}$$

$$= \frac{1}{1+j\omega\mathrm{RC}}$$

Afin de simplifier grandement les équations, pose $\omega_0 = \frac{1}{\mathrm{RC}}$

C'est ce qu'on appelle normaliser les formules.

Nous obtenons:

$$T = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

1.1 Module de cette fonction de transfert :

Note.

si : $z = a + jb$

alors : $\mathrm{module\,de}\,z\ :\ \rho = \sqrt{a^2+b^2}$

et : $\text{argument de } z : \theta = \text{acrtg}(\frac{b}{a})$

$$|T| = \rho = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

1.2 Fréquence de coupure à -3dB :

pour $\omega = \omega_0$ nous avons

$$\begin{aligned} |T|_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0}{\omega_0})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

1.3 Calcul du gain en tension (atténuation) pour $\omega = \omega_0$:

Rappel : par définition le gain en tension est égal, en décibels, à $20\log_{10}(|\mathrm{T}|)$

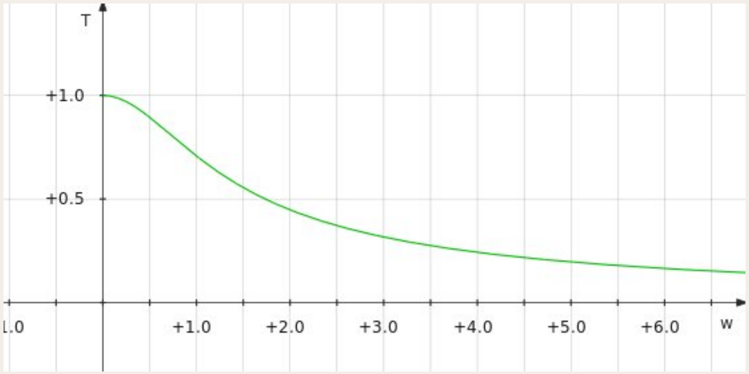
on vérifie que $20\log_{10}(\sqrt{2}) = 3,01$ et donc $20\log_{10}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -3.01\,\mathrm{dB}$

1.4 Argument de la fonction de transfert :

$$\varphi = \text{arctg}(\frac{\omega}{\omega_0})$$

2 Tracé du module de la fonction de transfert

2.1 échelle linéaire :



En abscisses $\omega\,/\,\omega 0$

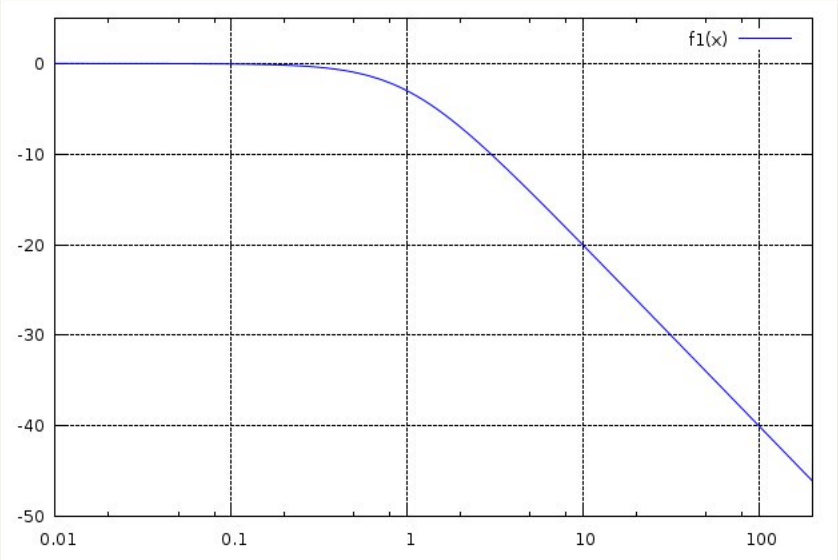
pour $\omega\,/\,\omega 0 = 1$ on lit $T = 0.707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

On voit pourquoi ce filtre est appellé filtre passe-bas.

2.2 échelle logarithmique :

Plus précisément : la courbe $20\ \text{Log}_{10}\ (T)$ avec échelle logarithmique pour la fréquence réduite ($\omega\,/\,\omega 0$ en x) et échelle de tracé linéaire pour y, mais comme on trace $20\ \text{Log}_{10}(T)$, cela revient à tracer T (sur l'axe Y) en échelle logarithmique également :

C'est ce qu'on appelle le DIAGRAMME DE BODE :



La pente de la courbe au delà de la fréquence de coupure $\omega = \omega 0$ est égale à $-20\mathrm{dB}$ par décade.

Le tracé a été effectué avec le logiciel libre GNUplot.

En voici le listing :

```
#courbe filtre RLC passe bas du premier ordre
set samples 1000
set xrange [0.01: 200]
set yrange [-50: 5]
set logscale x
set grid
f1(x)=20*log10 (1/sqrt( 1+x**2))
plot f1(x) with lines lt 3
```

En conclusion, une seule formule, **la fonction de transfert complexe**, nous renseigne *à la fois* sur l'amplitude et sur la phase du signal de sortie en fonction de la fréquence.