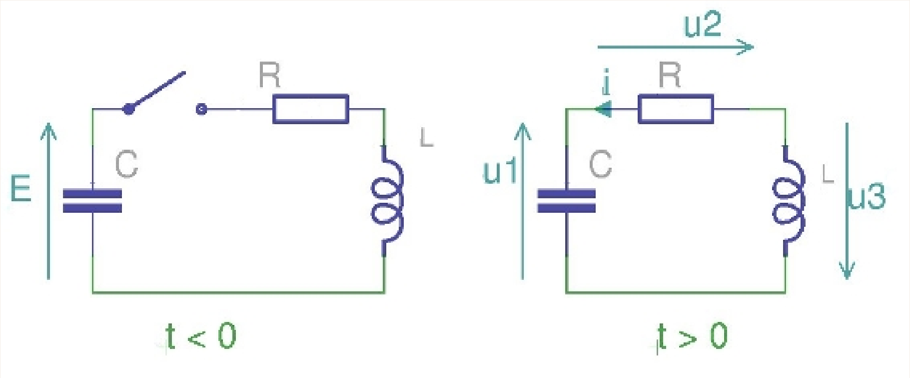
Oscillateur harmonique amorti

Circuit RLC



Soit le schéma constitué par :

un condensateur,

une inductance (« self »),

et une résistance

1 Description

On suppose le condensateur préalablement chargé par une tension E, par un moyen qui n'est pas représenté ici. A l'instant $t=0$ on ferme l'interrupteur. Que se passe-t-il?

S'il n'y avait pas l'inductance, le condensateur se déchargerait à travers la résistance suivant une courbe exponentielle décroissante. Mais l'inductance de la self va compliquer un peu les choses. Une oscillation peut apparaitre...

2 Calcul du circuit

2.1 équations de base

Concernant le condensateur donc, nous pouvons écrire :

$$dq = \mathrm{C}\,.du_1$$

$$dq = i\,.dt$$

il vient :

$$C.du_1 = i.dt$$

$$i = \mathrm{C}\frac{du_1}{dt} = \mathrm{C}.u_1' \tag{1}$$

et pour la résistance :

$$u_2 = R.i \tag{2}$$

concernant la self, nous avons :

$$u_3 = L\,\frac{di}{dt} = L.i' \tag{3}$$

Loi des mailles appliquée aux tensions :

(je ne vous ai pas encore parlé des lois de Kirchoff, la loi des mailles et de la loi des noeuds, c'est pas méchant, ça reste à faire...)

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \tag{4}$$

Cuisinons tout ça (on pose $u_1 = u$ afin de ne pas trainer cet indice dans toutes les calculs)

(1) et (2) donnent :

$$u_2 = \mathrm{RC}\,u' \tag{5}$$

(1) et (3) donnent :

$$u_3 = \mathrm{LC}\,u'' \tag{6}$$

avec $u_1'' = \frac{d^2u}{dt^2}$

plaçons (6) et (5) dans (4) pour obtenir une équation différentielle du second ordre :

$$\mathrm{LC}\,u'' + \mathrm{RC}\,u' + u = 0$$

que nous allons de suite normaliser :

$$u'' + \frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{LC}}u' + \frac{1}{\mathrm{LC}}u \;=\; 0$$

$$u'' + \frac{R}{L}u' + \frac{1}{\mathrm{LC}}u \;=\; 0$$

2.2 Résolution de l'équation différentielle :

on pose $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \\ m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$

on remarque au passage que :

$$\begin{aligned} 2m\omega_0 &= R\frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \times \sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= R\frac{\sqrt{C}}{L\sqrt{C}} \\ &= \frac{R}{L} \end{aligned}$$

Notre équation différenielle s'écrit alors :

$$u'' + 2m\omega_0\, u' + \omega_0^2\, u = 0$$

son équation caractéristique est la suivante :

$$a^2 + 2m\omega_0\, a + \omega_0^2 = 0$$

dont le voici le déterminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (2m\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 \\ &= 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 \\ &= m^2\omega_0^2 - \omega_0^2 \\ \\ &= \omega_0^2(m^2 - 1)\end{aligned}$$

Pour la suite, certaines démonstrations ont été faites sur ma page « équations diff du deuxième ordre ».

Cas où $m > 1$:

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et valent :

$$\begin{aligned} r_{(1,2)} &= -m\omega_0 \pm \sqrt{\Delta} \\ &= -m\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2-1} \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle est alors de la forme :

$$u = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Le condensateur se décharge suivant une exponentielle décroissante, sans oscillations.

Cas où $m < 1$:

Les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires et conjugées :

$$r_{(1,2)} = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

La solution de l'équation différentielle est alors de la forme :

$$u = K\, e^{-m\omega t}\cos(\omega t + \varphi)$$

En cuisinant un tout petit peu plus **et en tenant compte des conditions initiales**, on trouve les valeurs de K et de φ :

condition initiale: à t=0, $u(0) = E$

$$\begin{aligned} u(0) &= E \\ Ke^{-m\omega_0 \times 0} \cos(\omega \times 0 + \varphi) &= E \\ Ke^0 \cos(0 + \varphi) &= E \\ K \times 1 \times \cos(\varphi) &= E \\ K \cos \varphi &= E \end{aligned}$$

$$K = \frac{E}{\cos(\varphi)}$$

$\varphi = \operatorname{arctg}(m\frac{\omega_0}{\omega})$

D'ou l'équation de la tension u :

$$\boldsymbol{u = \frac{E}{\cos \varphi} e^{-m\omega t} \cos(\omega t + \varphi)}$$

En particulier pour $t = 0$ nous vérifions :

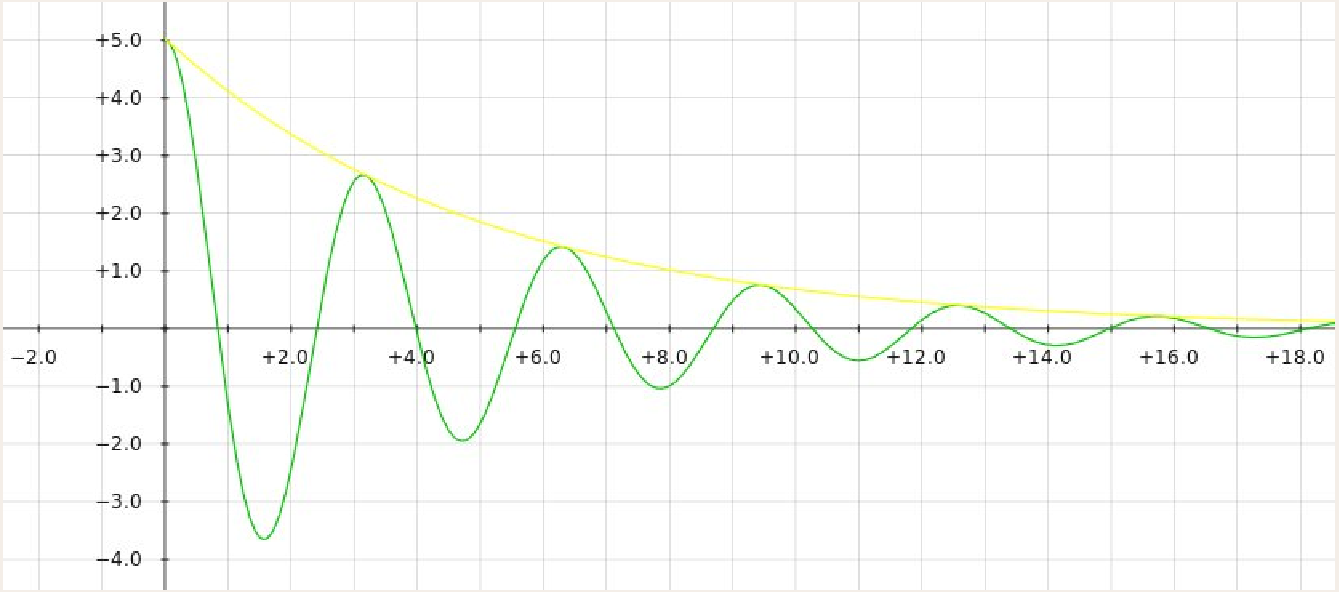
$$u(0) = \frac{E}{\cos \varphi} e^0 \cos(0 + \varphi)$$

$$= \frac{E}{\cos\varphi} 1 \times (\cos\varphi)$$

$$= \frac{E}{\cos\varphi} \cos\varphi$$

$$= E$$

2.3 Représentation graphique de la fonction $u(t)$



Remarque : j'ai un doute sur le fait que la sinusoïde parte sur son maximum. A vérifier.

La tension vue à l'oscilloscope