# Fonction Logarithme Népérien

## 1 Définition

La fonction logarithme népérien (ou logarithme de base $e$) est la primitive de la fonction $f = \frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$.

$$\ln(x) = \int \frac{1}{x} dx$$

## 2 Propriétés

par définition:

$$\mathbf{\ln(1) = 0}$$

soit $e$ un nombre réel tel que $\ln(e) = 1$ on calculera $e$ et on trouvera $e = 2,71828....$

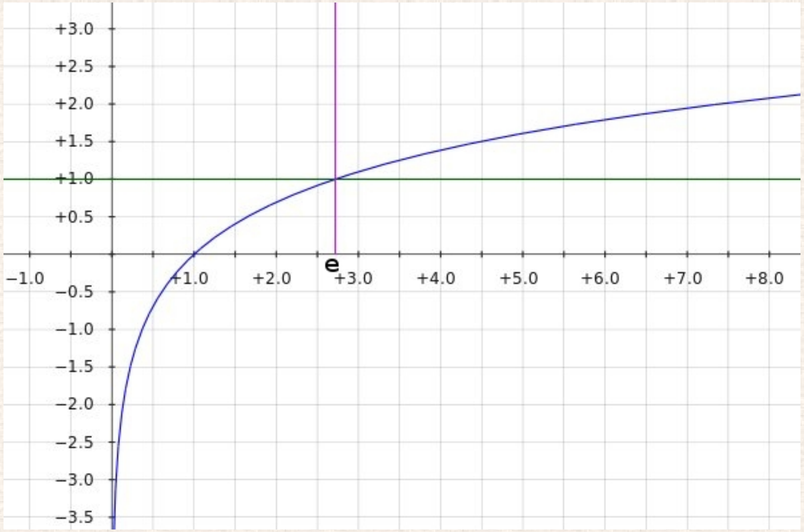
« $e$ » est un nombre irrationnel (comme $\pi$) qui vaut 2,71828....

Il a un développement en série très simple qui permet de calculer cette valeur avec autant de décimales que l'on veut. Nous verrons ça plus tard.

retenons que:

$\mathbf{ln(e) = 1}$

## 2.1 Tracé de la fonction $y = \ln(x)$ dans un repère orthonormé :




Courbe tracée avec le logiciel libre kmplot sous linux. Fonction $\mathbf{ln}$ (et pas $\log$ qui est le log décimal pour ce logiciel)

La courbe passe par zéro pour $x = 1$

en violet: $\mathbf{ln(e) = 1}$

La fonction tend vers $-l'\text{infini}$ lorsque $x$ tend vers zéro.

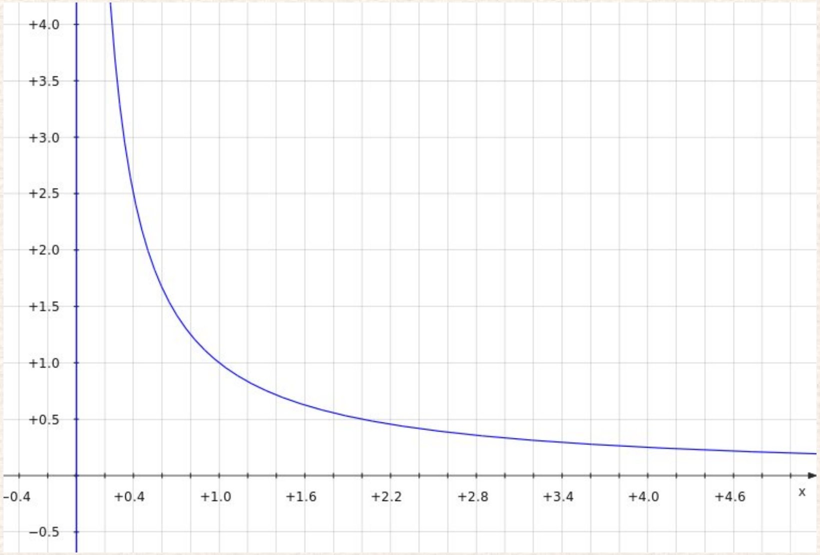
$\ln(x)$ n'est définie que pour $x > 0$

# 3 dérivée de $\ln(x)$

puisque $\ln(x)$ est la primitive de $\frac{1}{x}$ , sa dérivée est la fonction $y = \frac{1}{x}$

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

## 3.1 Tracé de la fonction y=1/x




C'est la pente de la courbe précédente.

Attention: ces deux courbes ne sont pas symétriques!

La fonction réciproque de Log(x) n'est PAS 1/x , c'est exp(x) comme on va le voir prochainement)

## 4 logarithme d'un produit, d'une puissance:

Nous utilisons la dérivée d'une fonction composée.

Rappel: $(g \circ u)'(x) = [g(u(x))]' = g'(u(x) \times u'(x))$

$$
\begin{aligned}
[\ln(ax)]' &= a \times \frac{1}{ax} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

ce qui montre que $\ln(\mathrm{ax})$ est aussi une primitive de $\frac{1}{x}$ au même titre que $\log(x)$

$$\begin{aligned}\ln(ax) &= \int [\ln(ax)]' \,\mathrm{dx} \\ &= \int \frac{1}{x} \,\mathrm{dx} \\ &= \ln(x) + C\end{aligned}$$

Calculons la valeur de la constante C

pour $x = 1$ nous avons :

$$\begin{aligned}\ln(a) &= \ln(1) + C \\ &= 0 + C \\ &= C\end{aligned}$$

donc $C = \ln(a)$

Remplaçons C par sa valeur dans le résultat précédent, nous obtenons :

$$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$$

Ainsi que :

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$

et :

$$\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$$

et :

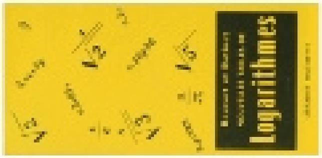
$$\begin{aligned} \ln(x^n) &= \ln(x \times x \times x \times .... n \,\text{fois}) \\ &= \ln(x) + \ln(x) + \ln(x) + ....n \,\text{fois} \\ &= n \ln(x) \end{aligned}$$

**Remarque.**

$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$

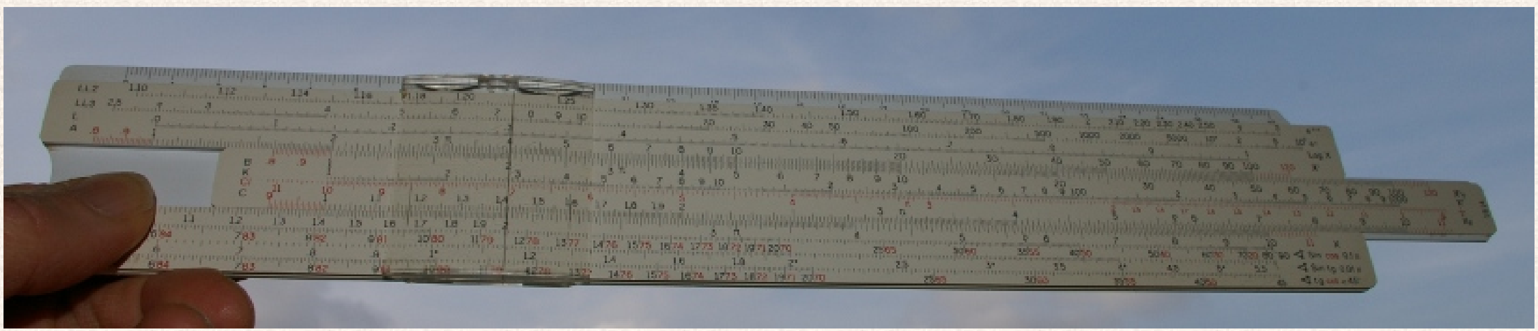
Cette propriété fondamentale des logarithmes qui consiste à remplacer des multiplications par des additions a débouché :

- sur l'impression des tables de logarithmes (petit livre plein de tableaux de correspondance entre les nombres de 1 à 10 000 et leur logarithme, permettant de faire rapidement des multiplications avec 6 chiffres significatifs en virgule flottante.




Cherchez sur le net « Bouvart et Ratinet » (il doit y avoir également d'autres marques déposées), « caractéristique », « mantisse ».

- sur la fabrication de "règles à calcul" très pratiques avec un peu d'habitude permettant d'effectuer des multiplications en virgule flottante (par addition de longueurs) d'une manière parfois plus rapide (quoi que moins précise, trois chiffres significatifs au maximum) que ce qu'on fait actuellement avec une calculatrice. Voici la mienne (que je conserve dans un tiroir) :D



On peut voir aussi sur cette photo que $2 \times 2 = 4$ mais aussi que $2 \times 1,2 = 2,4$

On peut faire aussi des divisions, calculer des carrés et racines carrées, Log et exp, des sin et cos, tangentes...

Nous allons maintenant nous intéresser à la fonction réciproque de la fonction Logarithme népérien, à savoir **la fonction exponentielle**. Et nous retrouverons alors les nombres complexes et la trigo. On va bientôt pouvoir appliquer tout ça à l'électronique!