CALCUL DE PI

Par Silicium 628

- Considérons la suite (infinie) **y** constituée des termes suivants : $y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

Ainsi que la valeur $z = 1 - x$
Calculons le produit $z.y$

$$z.y = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)$$
$$= 1(1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + x^3(1-x) + x^4(1-x) + \dots$$
$$= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + x^4 - x^5 \dots.$$

Vous remarquez que les termes s'annulent deux à deux ($-x^2+x^2$ etc…) jusqu'à… l'infini SAUF le premier =1
Donc $z.y = 1$

D'où $\frac{1}{z} = y$

Ce qui signifie que $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}$

C'est ce qu'on appelle le développement limité de $\frac{1}{1-x}$

Par changement de variable x en –x on obtient :

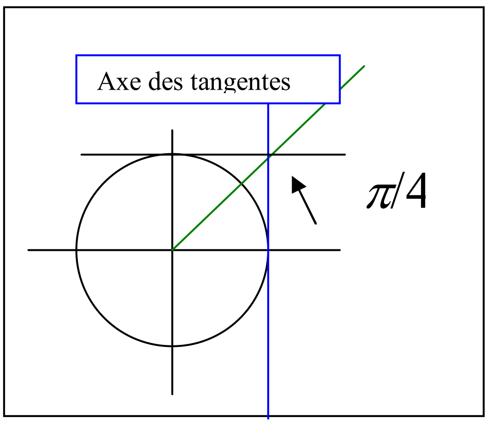
$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots}$ (les puissances paires x^2 etc… restant positives…)

Bon on ne va pas s'arrêter en si bon chemin, maintenant que nous avons ce nouveau jouet mathématique…
Par un nouveau changement de variable, changeons x en x^2 dans le dernier résultat :

$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots}$ (1) gardons ce résultat de côté, il nous servira dans un instant…

==============================

- Considérons maintenant le cercle trigonométrique et traçons un angle de $\pi / 4$ radians (= 45 deg)



On voit sur la figure ci-dessus que $\boxed{tg(\pi / 4) = 1}$ (c'est la diagonale d'un carré)

Donc $(\pi / 4) = Arctg(1)$ et $\boxed{\pi = 4.Arctg(1)}$
Idée : on va calculer le développement limité de la fonction Arc tangente qui est la fonction réciproque de la fonction tangente.

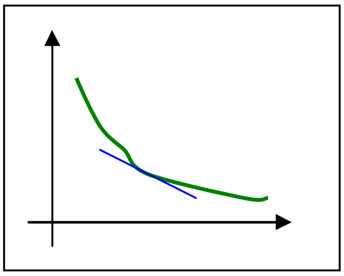
$y = Arctg(x) \Leftrightarrow x = tg(y)$

Dérivons la seconde écriture $x = tg(y) = \dfrac{\sin(y)}{\cos(y)}$

$x' = 1/(\cos^2 y) = 1 + tg^2 y$ (je peux vous le démontrer si vous insistez…)

Or la fonction dérivée de la fonction réciproque d'une fonction z, est égale à l'inverse de la fonction dérivée de la fonction z.

Pour vous en rappeler, dites vous que la fonction dérivée est la fonction qui à chaque pt de la fonction de départ associe le nb dérivé en ce pt. Or ce nb dérivé représente la pente de la droite tangente à la courbe représentant la fonction en ce point. La fonction réciproque étant celle obtenue en intervertissant x et y, Il est évident que la figure obtenue est symétrique de celle de départ et que la pente de la tangente devient… l'inverse de la pente de départ.



En fait $\dfrac{dy}{dx}$ devient $\dfrac{dx}{dy}$

Reprenons notre formule de départ :
$y = Arctg(x)$
Dérivons compte tenu de ce que nous venons de dire :

$y' = \dfrac{1}{x'}$

$y' = \dfrac{1}{1 + tg^2 y}$ mais n'oublions pas que $x = tg(y)$ et donc $tg^2 y = x^2$

Il vient

$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ = mais oui on vient de le calculer, = $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + ..$
Oui mais ce qui nous intéresse c'est de connaître le développement limité de y, pas de y'
Il suffit de calculer l'intégrale de y'

$$y = Arctg(x) = \int \frac{1}{1 + x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - ...$$

et puisque $\boxed{\pi = 4.Arctg(1)}$, faisons x=1 et multiplions le tout par 4 on obtient :

$$\boxed{\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - .... + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)}$$

Vous pouvez très facilement le vérifier si vous avez une calculatrice programmable ou avec un petit prog en Basic, Pascal, Delphi ou autre. Toutefois la suite converge lentement et génère des décimales fausses à des rangs imprévus pour certaines valeurs du nombre de termes… voir le site excellent (calcul de pi) répertorié sur ma page de liens.