ondes progressives et ondes stationnaires

par Silicium628

I - Ondes Progressives

1 Définition

Une onde progressive est une perturbation périodique (qui se répète dans le temps) et qui se se déplace dans l'espace, tels les vagues à la surface de l'eau, les ondes sonores, ou les ondes électromagnétiques.

1.1 Rappels:

La pulsation ω aussi appellée vitesse angulaire (en radians/seconde) est égale à $\omega = 2\pi f$
f étant la fréquence du signal (le nombre de périodes par seconde)
La fréquence f est quant à elle, liée à la période T par la relation $f = \frac{1}{T}$
ce qui nous donne $\omega = \frac{2\pi}{T}$
La période T est un temps, c'est la durée qui sépare les instants où le signal périodique se trouve dans des états identiques (même valeur et même sens de variation, par exemple deux maximums, deux minimums, ou dans le cas d'un signal sinusoïal, deux passages par zéro dans le même sens, tous deux montants ou tous deux descendants).

2 Propriétés

Les ondes progressives ont, en un point donné de l'espace, une périodicité temporelle T. C'est à dire qu'elles sont engendrées par une répétition périodique de signaux identiques de période temporelle T.
Les ondes progressives ont également à un instant donné, une périodicité spatiale: Au point d'émission la perturbation du milieu se reproduit à l'identique après une durée T. Mais pendant cette durée, l'onde s'est déplacée à la vitesse v , elle a donc parcouru au terme de cette durée une distance vT. Cette distance qui sépare donc les lieux ou la perturbation du milieu se reproduit à l'identique est appellée la *longueur d'onde* et est notée λ.
$\lambda = vT$ avec $v =$ vitesse de propagation de l'onde (dans le cas des ondes électromagnétiques et donc de la lumière, $v = c$)
La longueur d'onde λ est égale à la distance parcourue pendant la durée d'une période.
Plus généralement, après une durée t l'onde a progressé de la distance $x = vt$ dans l'espace.
On peut l'exprimer d'une autre façon, équivalente: à la distance x de la source et au temps t, l'onde a la valeur qu'avait la source au temps $t - \frac{x}{v}$.
En effet: à la distance x de la source et au temps t, l'onde a la valeur qu'avait la source au temps $t - t_0$, t_0 étant le temps mis pour parcourir la distance x c'est à dire que $t_0 = \frac{x}{v}$
donc on retrouve bien $t - t_0 = t - \frac{x}{v}$

3 Etude Théorique

3.1 Expression de $Y(x,t)$

soit Y la valeur de la perturbation (hauteur d'une vague, position d'un point d'une corde vibrante, valeur d'une tension ou d'un courant, d'un champs électrique ou magnétique, etc... suivant les cas). Voyons son expression mathématique en fonction du temps et de l'espace: C'est la fonction $Y(x,t)$, fonction de deux variables qui sont: l'espace x et le temps t.
Considérons une onde progressive sinusoïdale se propageant sur l'axe X'X dans le sens positif (de X' vers X)

$$Y(0,t) = A\cos\omega t$$

$Y(0,t)$ désigne la valeur de Y à l'endroit $x=0$ et au temps t.
Les propriétés que nous avons énoncé plus haut s'écrivent:

$$Y(x,t) = Y(0,t-\frac{x}{v})$$

de ces deux équations on déduit:

$$\begin{aligned} Y(0,t-\frac{x}{v}) &= A\cos\omega(t-\frac{x}{v}) \\ &= A\cos(\omega t-\frac{\omega x}{v}) \end{aligned}$$

or nous avons vu que $\omega=\frac{2\pi}{T}$ et que $\lambda=$vT
nous obtenons:

$$\begin{aligned} Y(x,t) &= Y(0,t-\frac{x}{v}) \\ &= A\cos(\omega t-\frac{\omega x}{v}) \\ &= A\cos(\omega t-\frac{2\pi x}{T}\times\frac{T}{\lambda}) \\ &= A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x) \end{aligned}$$

posons $k=\frac{2\pi}{\lambda}$
nous obtenons l'équation générale d'une onde progressive sinusoïdale:

$$Y(x,t) = A\cos(\omega t-kx)$$

si l'onde se déplace en sens inverse, dans le sens X vers X' le même calcul donne:

$$Y_r(x,t) = A\cos(\omega t+kx)$$

II - Ondes Stationnaires

4 Définition

On appelle onde stationnaire le phénomène vibratoire résultant de la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation ω se propageant en sens contraire.
Des ondes stationnaires se produisent par exemple par la superposition d'une onde incidente et de son onde réfléchie par un obstacle.

4.1 Lois de la réflexion:

L'onde réfléchie se propage à la même vitesse que l'onde incidente.
Si la reflexion se fait sans perte d'énergie, l'onde réfléchie a la même amlitude que l'onde incidente.
Le réflexion introduit un déphasage φ entre l'onde réfléchie et l'onde incidente.
si $\varphi = 0$ l'onde réfléchie et l'onde incidente sont en phase. (cas d'une corde vibrante dont l'extrémité est libre)
si $\varphi = \pi$ l'onde réfléchie et l'onde incidente sont en opposition de phase. (cas d'une corde vibrante dont l'extrémité est fixe)

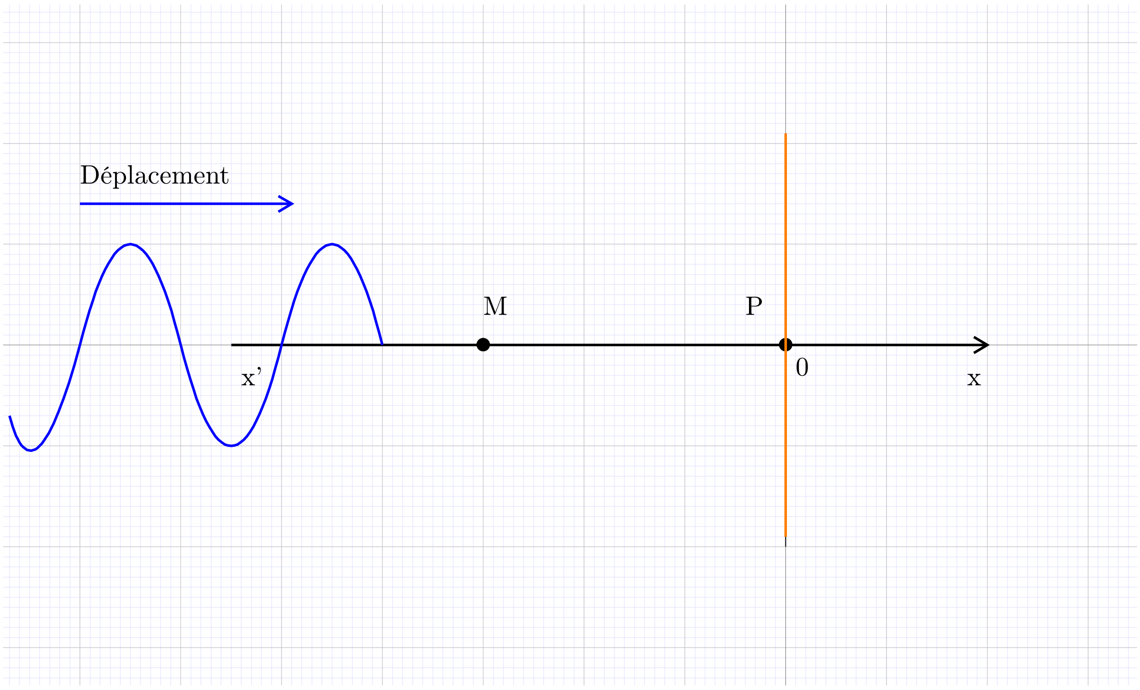
4.2 Lois de superposition:

Dans un milieu de propagation linéaire (c'est en particulier le cas pour le vide dans lequel se propagent les ondes électromagnétiques), un point M, sous l'action simultanée de deux perturbations $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ sera soumis à la somme $Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$

5 Etude Théorique

Prenons le cas d'un milieu de propagation non absorbant (l'amplitude des ondes n'est pas amortie au cours de leur propagation) à une dimension d'espace (le long d'une droite donc) et limité d'un côté par un obstacle (en orange sur le graphique) réfléchissant l'onde sans perte d'énergie au point P.

Note 1. Un obstacle peut occasionner une perte d'énergie, voire être totalement absorbant.
En électronique une ligne de transmission dont l'extrémité est ouverte ou est en court circuit réfléchit les signaux incidents. Si son extrémité est connectée sur une résistance de valeur égale à son *impédance caractéristique*, il n'y a pas de reflexion mais absorbtion totale du signal.



Soit une onde progressive incidente, sinusoïdale d'amplitude A se propageant vers le point P.
L'onde incidente provoque au point M la perturbation $Y_{1m}(t)$

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{iM}}(t) = A\cos(\omega t - kx)$$

qui se propage dans le sens positif de l'axe X'X

L'onde réfléchie provoque au point M la perturbation $Y_{2m}(t)$

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{rM}}(t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi)$$

qui se propage dans le sens négatif de l'axe X'X
Sous l'action de ces deux ondes agissant simultanément, le point M subit la perturbation résultante $Y_M(t)$ telle que $Y_M(t) = \mathrm{Y}_{\mathrm{iM}}(t) + \mathrm{Y}_{\mathrm{rM}}(t)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_{\mathrm{rM}(t)} &= A[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \varphi)] \\ &= 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

C'est une fonction sinusoïdale du temps (facteur $\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$)

et d'amplitude $2A\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)$ qui est une fonction sinusoïdale de la position x.
Remarquons que l'amplitude maximale est $2A$ soit le double de l'amplitude maximale du signal incident.

5.0.1 Calcul de φ dans le cas de reflexion sur un point fixe:

Voyons plus en détail le cas d'une corde vibrante dont une extrémité (point P) est fixe, (ou d'une ligne électrique terminée par un court-circuit sur laquelle se propage un signal de haute fréquence):

On peut écrire que quel que soit t:

$$\begin{aligned} Y_P(t) &= 0 \\ Y_{\mathrm{iP}}(t) + Y_{\mathrm{rP}}(t) &= 0 \\ A\cos\omega t + A\cos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ \cos\omega t &= -\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Cette dernière équation n'est vraie que si $\boldsymbol{\varphi = \pi}$
Donc dans ce cas les ondes stationnaires ont pour expression générale:

$$\begin{aligned} Y_M(t) &= 2A\cos(kx + \frac{\pi}{2})\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= 2A\sin(kx)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

C'est l'équation d'une fonction sinusoïdale du temps dont l'amplitude est une fonction sinusoïdale de la position x.

5.0.2 Noeuds d'amplitude:

Il existe dans le milieu de propagation des points d'amplitude toujours nulle: ce sont les noeuds. Leur position est donnée par: (avec $n =$ entier)

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= 0 \\ \text{ce qui se produit si :} & \\ kx &= n\pi \\ x &= \frac{n\pi}{k} \end{aligned}$$

et comme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
il vient:

$$\begin{aligned} x &= \frac{n\pi}{k} \\ &= n\pi \times \frac{\lambda}{2\pi} \\ &= n\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Ce résultat très important montre que les noeuds successifs sont distants de $\dfrac{\lambda}{2}$

5.0.3 Ventres d'amplitude:

A l'inverse de ce qui se passe pour les noeuds, il y a des points où l'amplitude de l'onde stationnaire est maximale.

Leur position est donnée par:

$$\begin{aligned}
\sin(kx) &= \pm 1 \\
\text{ce qui se produit si :} \\
kx &= (2n+1)\frac{\pi}{2} \\
x &= (2n+1)\frac{\pi}{2k}
\end{aligned}$$

et comme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
il vient:

$$\begin{aligned}
x &= (2n+1)\frac{\pi}{2k} \\
&= (2n+1)\frac{\lambda}{4} \\
&= n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}
\end{aligned}$$

Ce résultat montre que les ventres successifs sont eux aussi distants de $\frac{\lambda}{2}$ et sont situés à $\frac{\lambda}{4}$ des noeuds, c'est à dire à mi-distance entre les noeuds.
Tous les $\frac{\lambda}{4}$ on rencontre donc succéssivement un ventre, un noeud, un ventre, un noeud ainsi de suite.