L'opérateur laplacien

Nous connaissons la divergence obtenue en faisant le produit **scalaire** du vecteur opérateur $\vec{\nabla}$ avec un champ de vecteurs : $\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{E}} = \nabla . \vec{\boldsymbol{E}}$

Nous connaissons le rotationnel obtenue en faisant le produit **vectoriel** du vecteur opérateur $\vec{\nabla}$ avec un champ de vecteurs : $\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{E}} = \nabla \wedge \vec{\boldsymbol{E}}$

Il s'agissait dans les deux cas d'opérateurs de premier ordre consistant à calculer des dérivées premières des champs de vecteurs. Nous allons maintenant considérer **un opérateur d'ordre deux** : Le « laplacien ».

On distingue deux variantes de l'opérateur laplacien :

- Le laplacien scalaire qui s'applique à un champ scalaire.
- Et le laplacien vectoriel qui s'applique à un champ vectoriel.

1 Le laplacien scalaire

Le laplacien scalaire est défini comme la divergence du gradient.

1.1 Rappels :

1.1.1 le gradient d'un champ scalaire

Soit un espace scalaire dont la valeur en chaque point est une fonction $f(x, y, z)$ dans la base cartésienne orthonormée de vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Le gradient en chaque point **est le vecteur** :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

1.1.2 la divergence d'un champ vectoriel

La divergence d'un champ vectoriel est le **produit scalaire** du vecteur opérateur nabla par le champ vectoriel.

$\vec{\nabla}.\vec{E} = \mathrm{div}\,(\vec{E})$ (divergence de $\vec{E}$) -> résultat d'un produit scalaire, donc **un scalaire**.

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z$$

c'est à dire :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

1.2 Le laplacien scalaire

Le laplacien scalaire étant la divergence du gradient, nous déduisons de ce qui précède qu'il s'applique à un champ scalaire et a pour résultat un champ scalaire.

$\text{laplacien de } f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \text{div}\,(\nabla f) = \nabla.(\nabla.f) = \nabla^2 f = \Delta f$

(attention à ne pas confondre Δ avec ∇)

Voyons ce que cela donne pour les composantes :

soit $f(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\nabla.(\nabla.f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2 Le laplacien vectoriel

soit le champ vectoriel $\vec{E}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = f_x(x, y, z) \\ E_y = f_y(x, y, z) \\ \text{Ez} = f_z(x, y, z) \end{cases}$$

les composantes du champ vectoriel pour chaque point de l'espace sont des fonctions de (x, y, z)

Le laplacien vectoriel est un vecteur opérateur aux dérivées partielles du second ordre qui a pour expression :

$$\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\nabla}^2 . \vec{E}$$

Le résultat s'obtient en appliquant *le laplacien scalaire vu ci-dessus* à chaque composante des vecteurs constituant le champ vectoriel.

La composante x du champ vectoriel $\vec{E}$ c'est E_x qui est une fonction de la position (x, y, z).

$$E_x = f_x(x, y, z)$$

Le laplacien de cette fonction c'est $(\Delta \vec{E})_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x$

ou pour écrire les choses en détails :

$$(\Delta \vec{E})_x = \frac{\partial^2 f_x(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x(x, y, z)}{\partial z^2}$$

Le même calcul doit être fait pour les composantes E_y et E_z.

$$(\Delta \vec{E})_y = \frac{\partial^2 f_y(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y(x, y, z)}{\partial z^2}$$

$$(\Delta \vec{E})_z = \frac{\partial^2 f_z(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z(x, y, z)}{\partial z^2}$$

Attention donc à ne pas tout mélanger, en particulier les fonction f_x, f_y et f_z qui sont trois fonctions bien distinctes. Lorsque les formules se ressemblent trop, on a vite fait de les confondre.

Voici donc à nouveau ces composantes du résultat (qui n'est pas exactement un vecteur, mais un pseudo-vecteur, parce que bien qu'il comporte trois composantes, celles-ci ne se comportent pas comme celles d'un vecteur vis-à-vis de certaines symétries) :

$$
\begin{aligned}
(\Delta\,\vec{E})_x &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_x \\
(\Delta\,\vec{E})_y &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_y \\
(\Delta\,\vec{E})_z &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2}E_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2}E_z
\end{aligned}
$$

-Bouh-ou c'est hyper compliqué !

- mais pas du tout, ce ne sont que de simples dérivées partielles qui ne sont que des dérivées ordinaires lorsqu'on considère toutes les variables sauf une comme fixes.

-ah, oui ! Mais ça sert à quoi ?

-à plein de choses en physique. D'ailleurs nous allons immédiatement nous servir de ce laplacien, appliqué aux équations de Maxwell, pour expliquer la propagation des ondes électromagnétiques à la vitesse de la lumière ! Au passage nous utiliserons des équations différentielles aux dérivées partielles pour faire émerger des ondes...