Rotationnel d'un champ vectoriel

Nous connaissons la divergence obtenue en faisant le produit scalaire du vecteur opérateur $\vec{\nabla}$ avec un champ de vecteurs.

Nous allons maintenant faire le **produit vectoriel** de ∇ avec un champ vectoriel. Le résultat est appelé le *rotationnel* du champ de vecteurs. La divergence nous a servi pour écrire la première équation de Maxwell et nous servira à nouveau pour une autre équation. Dans les articles suivants nous verrons que le rotationnel figure dans deux autres équations de Maxwell (il y en a quatre en tout).

Définition.

soit le champ vectoriel $\vec{E}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{E}\begin{cases} E_x \\ E_y \\ \mathrm{Ez} \end{cases}$$

Le rotationnel est un opérateur aux dérivées partielles qui a pour expression :

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$ (parfois noté $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$; les anglophones écrivent $\mathrm{curl}\,\vec{E}$)

avec $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ou encore : $\vec{\nabla} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ \\ E_y \\ \\ \mathrm{Ez} \end{pmatrix}$$

voici donc les composantes du résultat (qui n'est pas exactement un vecteur, mais un pseudo-vecteur, parce que bien qu'il comporte trois composantes, celles-ci ne se comportent pas comme celles d'un vecteur vis-à-vis de certaines symétries) :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x &= \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \quad = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\
(\mathrm{rot}\,\vec{E}_y) &= \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \quad = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\
(\mathrm{rot}\,\vec{E}_z) &= \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \quad = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}
\end{aligned}$$

J'ai écrit deux fois la même chose pour chaque composante afin de bien mettre en évidence l'ordre des facteurs : En particulier il faut que les opérateurs de dérivation

$\frac{\partial}{\partial i}$ soient toujours placés à gauche des quantités à dériver sinon l'écriture n'a pas de sens. L'opérateur vectoriel ∇ n'est en ce sens pas un vecteur ordinaire vis à vis du produit vectoriel. Et ce produit vectoriel n'est donc pas un produit vectoriel ordinaire, ces composantes ne sont pas des différences entre des produits (multiplications) ordinaires, mais entre des résultats de dérivations partielles.

En clair $\frac{\partial}{\partial y}E_z$ signifie dériver partiellement la fonction représentant la composante E_z par rapport à la variable y , alors que $E_z\frac{\partial}{\partial y}$ n'a pas de signification mathématique (on pourrait y voir un opérateur affamé, mais pas un résultat).

Que représente le rotationnel

Le rotationnel en un point d'un champ de vecteur représente la rotation de ce champ autour de ce point, c'est à dire permet de connaître l'orientation du plan de circulation des lignes de champs autour de ce point (le vecteur rotationnel est orthogonal à ce plan) et « l'amplitude, la vitesse, la courbure » (suivant le type de champ) de cette rotation (par son module). Voyons cela avec un exemple simple :

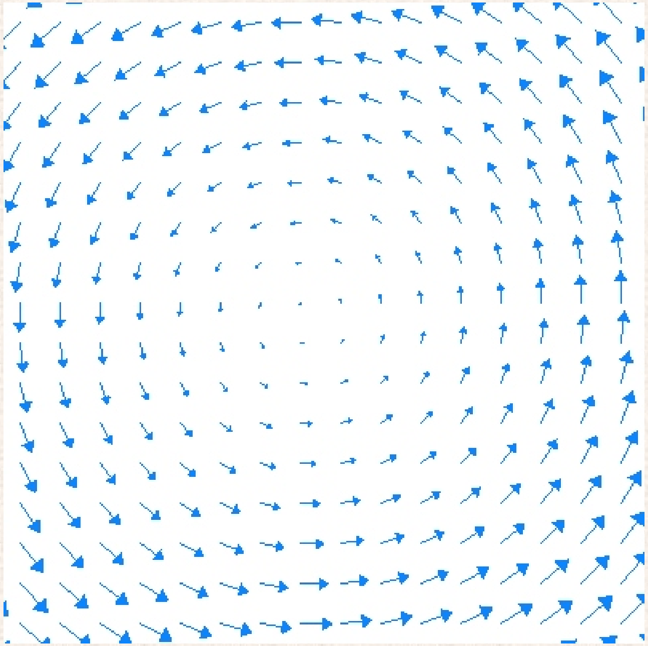
Exemple 1. rotationnel partout le même

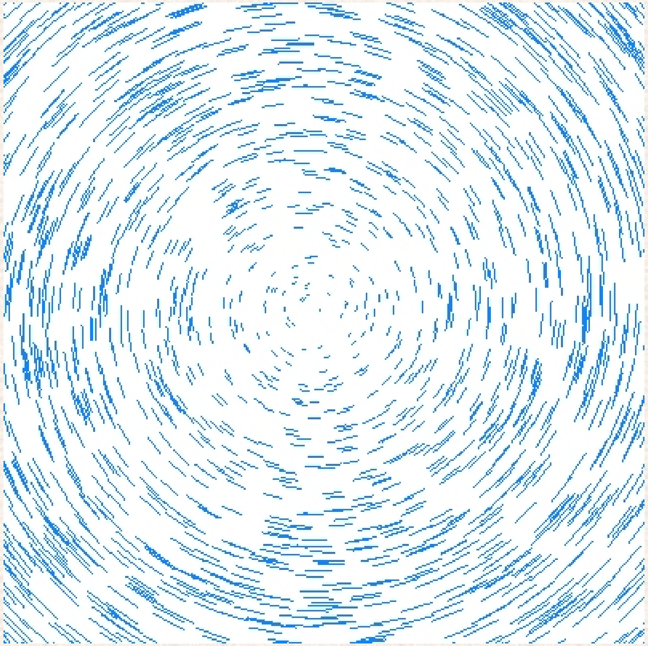
soit un champ vectoriel $\vec{E}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définit comme suit :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = -y \\ E_y = x \\ E_z = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \vec{E} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 0\vec{k}$$

Tous les vecteurs de $\vec{E}$ sont situés dans le plan $x0y$ puisque la composante z est nulle (ceci pour simplifier les calculs). Il est toutefois nécessaire de considérer ce champ dans un espace à trois dimensions afin de pouvoir calculer le produit vectoriel.

En voici une représentation avec les petites flèches et des points alignés puis sans les flèches et des points distribués aléatoirement dans le plan :





Passons maintenant la parole à Monsieur Météo... ça va mal ! C'est en effet ce que nous allons calculer. Mais remarquons que cet exemple montre des vecteurs dont le module augmente linéairement lorsqu'on *s'éloigne* du centre, ce qui correspond à ce qui se passe pour la vitesse de points situés sur un disque tournant, mais pas au vent dans une dépression ou un cyclone car alors au contraire les vitesses augmenteraient lorsqu'on se *rapproche* du centre (conservation du moment cinétique).

Calcul du rotationnel :

$$(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x = \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y = \frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}x = 0 - 0 = 0$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}_y\right) = \frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z = \frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}0 = 0 - 0 = 0$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}_z\right) = = \frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x = \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

Ce rotationnel se réduit donc à un vecteur dont la seule composante non nulle est orientée suivant l'axe z perpendiculaire au plan de rotation.

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 2 \end{cases}$ ou encore $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} = 2\vec{k}$

Ce rotationnel appliqué au champ de vecteurs a la même valeur en tout point (sa seule composant non nulle est une constante, elle ne dépend pas de x ni de y) *mais ce n'est bien sûr pas toujours le cas*. Le champ vectoriel en lui même n'a pas de centre et chacun de ses vecteurs peut être représenté au centre de la rotation pour faire le calcul. Le résultat du calcul pour n'importe quel point sera toujours le même pour *ce champ vectoriel*.

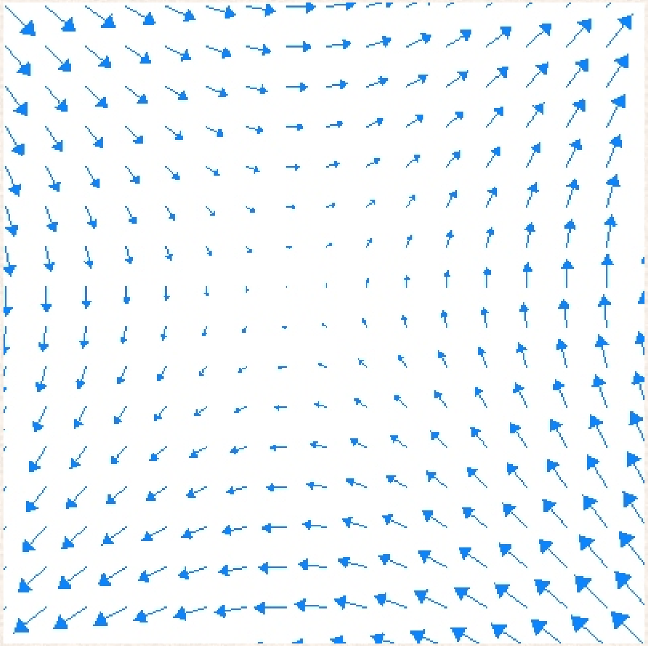
Exemple 2. rotationnel partout nul

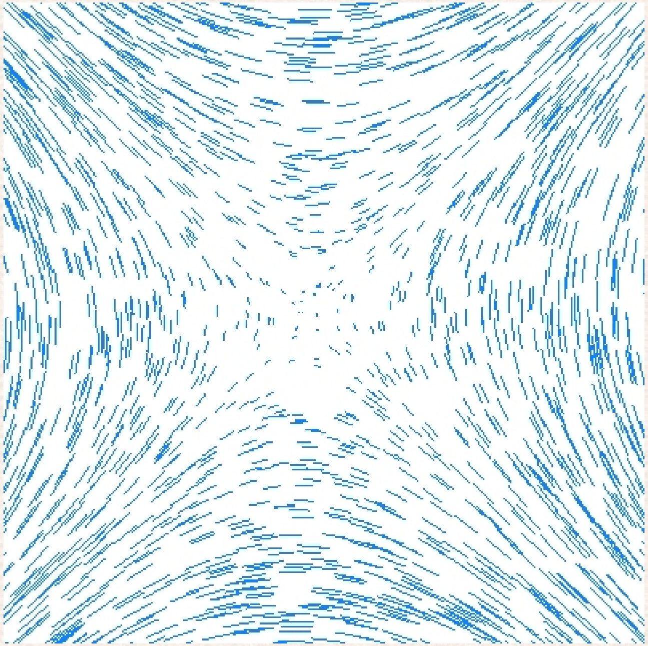
soit un champ vectoriel $\vec{E}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définit comme suit :

$\vec{E}\begin{cases} E_x = y \\ E_y = x \\ E_z = 0 \end{cases}$ ou encore $\vec{E} = y\vec{i} + x\vec{j} + 0\vec{k}$

Il n'y a qu'un signe qui diffère ($-y \leftrightarrow y$ pour la composante x) par rapport à l'exemple précédent.

Tous les vecteurs de $\vec{E}$ sont situés dans le plan $x0y$. Il est toutefois nécessaire de considérer ce champ dans un espace à trois dimensions afin de pouvoir calculer le produit vectoriel.





Calcul du rotationnel :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\,\vec{E})_x &= \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y = \frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}x = 0 - 0 = 0 \\
\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}_y\right) &= \frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z = \frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}0 = 0 - 0 = 0 \\
\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}_z\right) &= = \frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x = \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}y = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} = 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

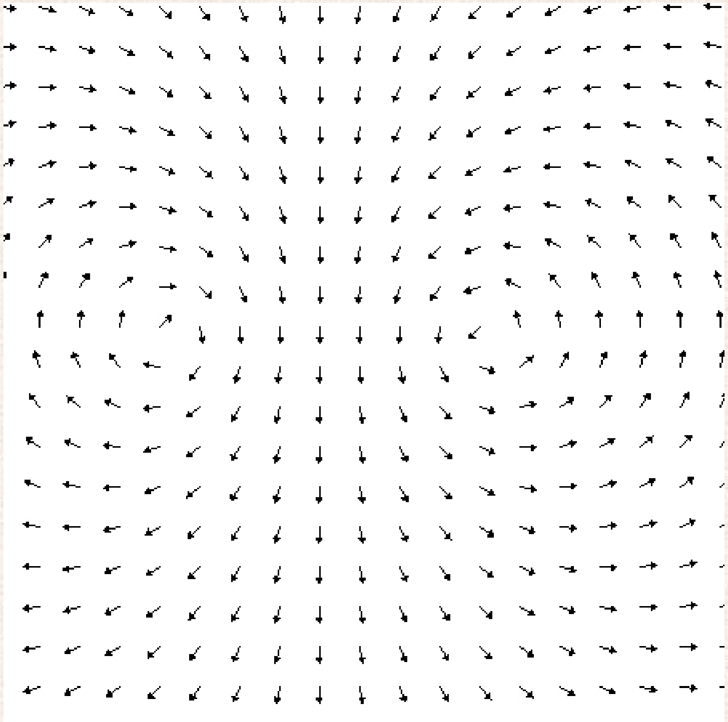
Ce rotationnel se réduit donc au vecteur nul en tout point.

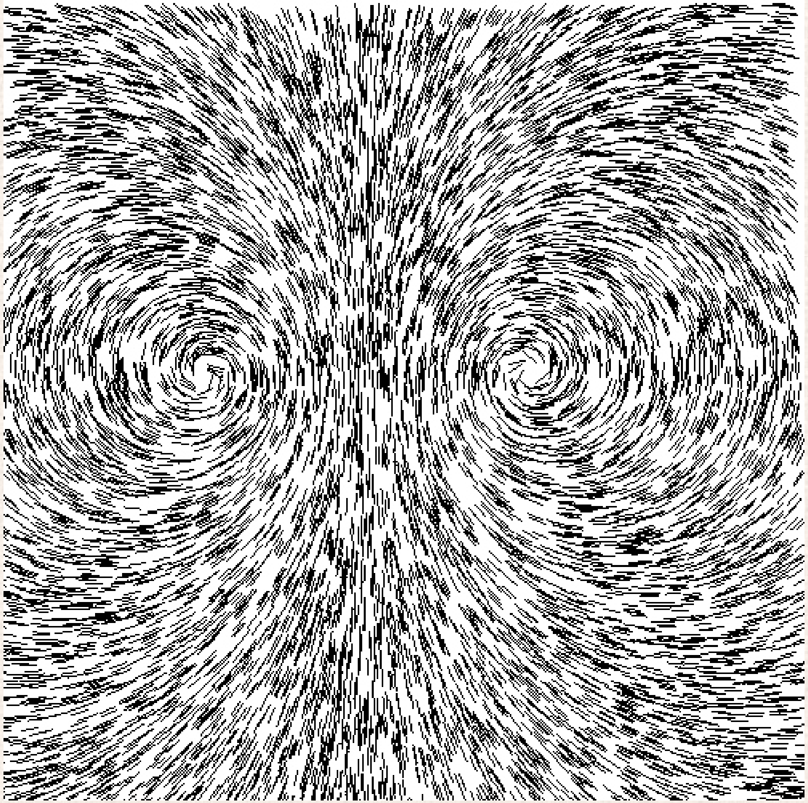
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

Le résultat du calcul pour n'importe quel point sera toujours le même pour *ce* champ vectoriel. Il n'y a rien qui « tourne » nulle part.

Exemple 3. Tourbillons, vortex etc...

Voici donc un exemple plus complexe dans lequel « ça tourne » mais pas partout, ni partout dans le même sens.





C'est le genre de situation que l'on rencontre fréquemment dans les fluides, en bout des ailes d'un avion et dans le regard des hiboux. Vive l'informatique qui permet de tracer ces figures en une fraction de seconde !

A l'évidence la valeur du vecteur rotationnel dépendra de l'endroit pour lequel on le calcule, c'est à dire que cette fois ses composantes ne seront pas égales à des valeurs fixes, mais seront des fonctions de x et y.

Voici une capture d'écran du code qui permet de tracer cela (à placer dans une boucle faisant évoluer x et y). s vaut $+1$ ou -1 (sens de rotation)

```
double x1, x2, A, B;
x1=x+100;
x2=x-100;
A=sqrt(x1*x1 + y*y);
B=sqrt(x2*x2 + y*y);
dx= s*0.05*( (-y/A)*B + (+y/B)*A );
dy= s*0.05*( (+x1/A)*B + (-x2/B)*A );
```

Ce qui correspond à un champ vectoriel de la forme :

$$x_1 = x + 100$$

$$x_2 = x - 100$$

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = \left[\left(-y_1/\sqrt{x_1^2+y^2}\right)\times\sqrt{x_2^2+y^2}\right] + \left[\left(y_2/\sqrt{x_2^2+y^2}\right)\times\sqrt{x_1^2+y^2}\right] \\ E_y = \left[\left(x_1/\sqrt{x_1^2+y^2}\right)\times\sqrt{x_2^2+y^2}\right] + \left[\left(-x_2/\sqrt{x_2^2+y^2}\right)\times\sqrt{x_1^2+y^2}\right] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Il y a simplement deux pôles dans les équations,

pour $x_1^2 + y^2 = 0$ et $x_2^2 + y^2 = 0$

Le champ n'est pas défini pour ces deux valeurs des coordonnées (singularités).

Remarque. Ce n'est pas juste un avatar de ces équations, c'est une chose que l'on rencontre si l'on se pose la question (par exemple) de la valeur du champ éléctrique à une distance nulle d'une particule élémentaire comme l'électron... En fait le modèle représentant une particule élémentaire comme un point de dimensions nulles situé à un endroit totalement défini n'est pas tenable. On en reparlera.

Le champ total dans notre exemple est en fait la somme de deux champs chacun contenant un des pôles, avec des rotations en sens inverses. On peut faire plus simple, ou plus compliqué, c'est juste pour illustrer ce type de vortex.