

# Fonctions de plusieurs variables

## Introduction

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des fonctions d'une seule variable, par exemple le temps  $t$ , ou une variable quelconque  $x$  (qui n'est pas nécessairement une dimension de l'espace) et nous écrivons la fonction  $f(x) = y$ . Nous avons étudié le comportement de ces fonctions lorsque  $x$  varie, et cela nous a fait découvrir l'intégration, la fonction dérivée et les équations différentielles qui sont au coeur de bien des processus physiques et électriques de base.

Mais nous vivons dans un espace à trois dimensions d'espace (peut-être même davantage, dix voire onze suivant la très spéculative théorie des supercordes...) plus une de temps. Si nous voulons nous intéresser à l'électrostatique et à l'électromagnétisme par exemple, nous allons devoir étudier ce qui se passe lorsqu'une particule chargée se déplace dans un tel espace à trois dimensions. Nous verrons aussi qu'à cet espace mathématique (coordonnées  $x, y, z$ ) qu'on appelle parfois « le fond », se superpose ce que l'on appelle des « champs », électriques ou magnétiques, ou autres... c'est à dire des grandeurs scalaires ou vectorielles qui varient continuellement d'un point de l'espace à un autre, et aussi dans le temps.

Tout ça pour dire que la physique traite essentiellement de fonctions qui dépendent simultanément de **plusieurs** variables. C'est aussi valable pour l'Optique, la théorie de la Relativité Générale, la Thermodynamique, la Mécanique des fluides, la Mécanique

Quantique, l'Electromagnétisme, l'Astrophysique, la Cosmologie, et j'en oublie dans des domaines qui me sont moins familiers (la Météorologie par exemple).

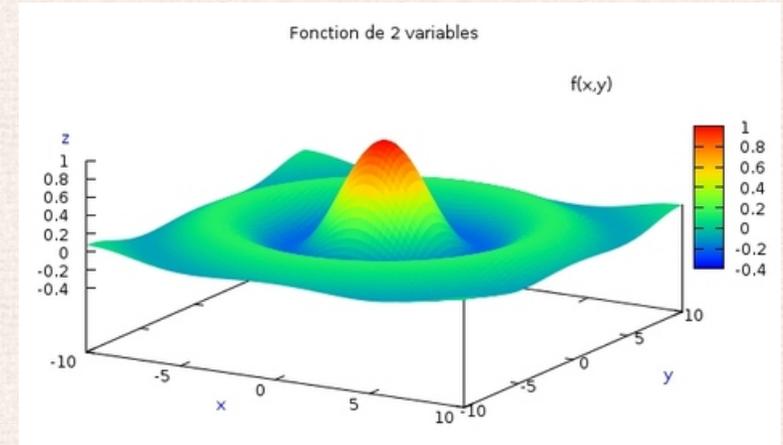
Bref, les fonctions de plusieurs variables sont incontournables, leur dérivation aussi. Je n'en traiterai toutefois que les grandes lignes, avant d'aborder les *champs de vecteurs*.

Exemple d'une fonction de deux variables :

(le sinus cardinal de la distance au centre de chaque point, c'est juste pour faire joli...)

$$z = f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(tracé effectué avec gnuplot sous Linux)



Nous allons donc étudier *les dérivées partielles* et ce qui s'ensuit naturellement, les *équations aux dérivées partielles*.

## 1 La dérivée partielle

### 1.1 Définitions

La dérivée partielle concerne les fonctions de plusieurs variables. La dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables est la dérivée de cette fonction par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes.

Cette dérivée partielle (dite *première* ou de premier ordre) est notée  $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\partial$  -> « ou d rond » à ne pas confondre avec  $\delta$  « delta minuscule, accroissement »

Dans le cas d'une fonction « ordinaire » d'une seule variable, la dérivée partielle et la dérivée sont identiques :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Soit  $f$  une fonction de  $x$ , et  $f'$  sa fonction dérivée, si la variable  $x$  s'accroît de la valeur infinitésimale  $dx$ , la fonction  $f$  s'accroît d'une quantité différentielle  $df = f'dx$ . C'est une autre façon d'écrire la formulation précédente.

Dans le cas d'une fonction de plusieurs variables  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  n'est pas LA dérivée de la fonction. La différentielle « totale » de la fonction est égale à la somme de toutes les différentielles partielles de la fonction par rapport à toutes ses variables :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n \quad (1)$$

Cela semble aller de soi, mais en fait ça mérite d'être examiné de plus près. Nous allons y revenir, mais avant de préciser ce point, voyons des exemples de fonctions aux dérivées partielles :

## 1.2 Exemples de fonctions aux dérivées partielles

### 1.2.1 exemple 1

soit la fonction  $s = f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2 + 2x_3 + x_3^3 - 4x_2 x_3$

Calculons les dérivées partielles de cette fonction par rapport à  $x_1, x_2$  et  $x_3$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 10x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3 - 4x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + 3x_3^2 - 4x_2$$

Les formules de la dérivation classique s'appliquent, il faut juste considérer que les variables autres que celle considérée sont des constantes (et ne pas s'emmêler les pinceaux!).

## 1.2.2 exemple 2

soit la fonction  $s = f(x, y, z) = 3y + \cos(x^2yz)$

remarque : ici  $y$  est une variable comme  $x$  et  $z$  ce n'est pas le résultat de la fonction. Il faut s'habituer à ne pas confondre ce genre de choses...

calcul de  $\frac{\partial f}{\partial x}$

- le premier terme ne comprend pas  $x$  donc dérivée = 0

- le second terme est  $\cos(x^2yz)$  c'est une fonction composée (nous avons déjà étudié la dérivée d'une fonction composée sur ce site):

rappel1 : soit  $g(u(x)) = g \circ u(x)$

$[g \circ u(x)]' = g'(u(x)) \times u'(x)$

rappel2:  $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

ici  $g() = \cos()$  et  $u(x) = x^2 y z$

$$g' = -\sin \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} = 2x y z$$

$$g'(u(x)) = -\sin(x^2 y z)$$

$$[\cos(x^2 y z)]' = -\sin(x^2 y z) \times 2x y z = -2x y z \sin(x^2 y z)$$

Je ne détaillerai pas les deux autres dérivées partielles, le principe est le même. Voici donc nos trois dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x y z \sin(x^2 y z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 - x^2 z \sin(x^2 y z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x^2 y \sin(x^2 y z)$$

### 1.2.3 Infinitésimal du deuxième ordre

Quittons maintenant ces exemples pour revenir ce que nous avons appelé en (1) la différentielle « totale » d'une fonction de plusieurs variables :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n$$

Voyons cela de plus près. Prenons l'exemple d'une fonction de deux variables

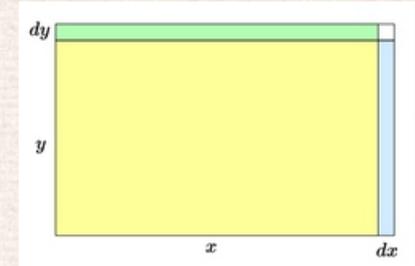
$$S = f(x, y) = x \times y$$

Les dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x$  et  $y$  sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$S$  peut représenter l'aire  $x \times y$  d'un rectangle de côtés  $x$  et  $y$  représentée ci-contre en jaune.



L'accroissement infinitésimal de  $S$  lorsque  $x$  croît de  $dx$  est

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx = y \cdot dx \rightarrow \text{c'est la surface du petit rectangle bleu.}$$

L'accroissement infinitésimal de  $S$  lorsque  $y$  croît de  $dy$  est

$$\frac{\partial f}{\partial y} dy = x \cdot dy \rightarrow \text{c'est la surface du petit rectangle vert.}$$

écrire :  $dS = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$  revient donc à ignorer le petit « carré » (blanc) de surface  $dx \cdot dy$ . Pourtant lorsque la longueur du côté  $x$  croît de la valeur  $dx$  ET que la longueur du côté  $y$  croît de la valeur  $dy$ , au final la surface totale de  $S$  croît de  $y \cdot dx + x \cdot dy + dx \cdot dy$  ce qui donne

$$S_{\text{totale}} = (x + dx)(y + dy) = xy + y \cdot dx + x \cdot dy + dx \cdot dy$$

Est-il raisonnable de négliger le terme  $dx \cdot dy$ ? Dans la plupart des cas oui parce qu'il est d'ordre 2 (c'est un « infinitésimal au carré »), et que sa valeur est donc bien plus petite que celles de  $dx$  et  $dy$  prises isolément, qui sont déjà des valeurs infinitésimales.

On peut s'en convaincre avec un simple calcul numérique :

soit  $x = 10m$  ,  $y = 10m$  ,  $dx = 1mm$  et  $dy = 1mm$

$\frac{dx}{x} = 10^{-4}$  ce qui est déjà *par définition* considéré comme très petit (si ce n'est pas le cas il faut choisir un  $dx$  encore plus petit !), et  $\frac{dx \cdot dy}{x \cdot y} = \frac{10^{-3} \times 10^{-3}}{10 \times 10} = 10^{-8}$  ce qui est  $10^4$  fois plus petit encore.

## 1.3 Le gradient

Le gradient est un **vecteur**.

C'est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières (c.-à-d. du premier ordre) de la fonction en un point donné.

Le gradient de la fonction  $f$  est noté  $\overrightarrow{\text{grad}} f$  ou  $\nabla f$

Le signe  $\nabla$  se prononce **nabla** du fait de sa ressemblance avec une harpe grecque antique. Ne pas confondre avec le delta majuscule  $\Delta$  (l'opérateur *laplacien*).

### 1.3.1 Le gradient dans $\mathbb{R}^3$

Soit une fonction  $f(x, y, z)$  dans la base cartésienne orthonormée

de vecteurs unitaires  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$  -> c'est un vecteur. (on note parfois  $\vec{\nabla} f$  pour ne pas l'oublier)

## Champ scalaire - exemple du gradient de température :

Un exemple courant est celui de la fonction de plusieurs variables  $T(x, y, z)$  donnant la température (c'est un scalaire) en chaque point de l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

C'est la définition même d'un *champ scalaire* :

Un **champ scalaire** est une fonction de plusieurs variables qui associe un seul nombre (ou scalaire) à chaque point de l'espace.

Nous verrons par la suite qu'il existe aussi des champs vectoriels. Mais restons-en pour l'instant à notre champ scalaire.

Lorsqu'on se déplace d'un point à un autre dans l'espace, la température varie :

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \rightarrow \text{c'est un vecteur, nous reviendrons sur ce point plus tard.}$$

Si (par exemple) on se déplace du point  $\mathbf{P}_1$  au point infiniment proche  $\mathbf{P}_2$  dans la direction de  $\vec{j}$  uniquement, d'une longueur  $\delta y$  la température qui était  $T_1(x, y, z)$  en  $\mathbf{P}_1$  devient  $T_2(x, y + \delta y, z)$  en  $\mathbf{P}_2$

On peut écrire :

$$T_2(x, y + \delta y, z) = T_1(x, y, z) + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y$$

Si l'on se déplace dans les trois directions à la fois, on peut généraliser cette écriture :

$$T(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = T(x, y, z) + dT$$

avec  $dT = \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z \rightarrow$  c'est un scalaire (accroissement de température).

Certains écrivent  $\Delta T$ , mais je trouve qu'on a vite fait de confondre  $\Delta$  et  $\nabla$  !!

$\delta x, \delta y, \delta z$  forment les composantes d'un vecteur, le vecteur déplacement de  $\mathbf{P}_1$  en  $\mathbf{P}_2$ , appelons le  $\vec{V}$

$$\vec{V} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$$

Calculons le produit scalaire  $\vec{\nabla} T \cdot \vec{V}$   $\rightarrow$  ce sont deux vecteurs, j'ai d'ailleurs mis les flèches pour bien le souligner.

rappel : produit scalaire

$$(A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = A_x B_x + A_y B_y$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} T \cdot \vec{V} &= \left( \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (\delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}) \\ &= \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z \\ &= dT \end{aligned}$$

Ainsi la *différence de température* entre deux points est égale au produit scalaire du gradient de  $T$  par le vecteur de déplacement qui joint ces deux points. C'est la différence de deux scalaires (deux températures) donc un scalaire, et le produit scalaire est effectivement un scalaire.

Cette différence de température entre les deux points est à l'évidence indépendante du système de coordonnées choisi et en particulier elle est invariante par rotation (si nous faisons tourner le repère, (et en plaçant l'un des points à l'origine afin de simplifier la chose...)) Or nous savons que les composantes de  $\vec{V}$ , elles, se transforment suivant une règle précise lors d'une rotation justement parce que  $\vec{V}$  est un vecteur. Et cette règle précise nous l'avons vu lors de l'étude des applications linéaire, consiste à effectuer le produit matriciel de la matrice de rotation par ledit vecteur  $\vec{V}$

pour mémoire, voici cette matrice de rotation (d'un angle  $\theta$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$\text{Mat}(\mathbf{R}_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

par exemple dans le plan  $\mathbb{R}^2$  ceci revient à dire que les composantes de  $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  deviennent après rotation d'un angle  $\theta$

$$\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta \\ y_1 \cos \theta - x_1 \sin \theta \end{pmatrix}$$

Puisque la formule  $\vec{\nabla} T \cdot \vec{V} = dT$  est vraie ( $dT$  est un scalaire), il faut donc que les composantes de  $\nabla T$  se transforment par rotation d'une manière analogue à celle du vecteur  $\vec{V}$ . Ceci est la démonstration (merci Richard Feynman qui me l'a soufflé...) que  $\nabla T$  est un vecteur, et qu'on peut donc mettre la petite flèche  $\vec{\nabla} T$ .

Mais alors on peut aller encore un peu plus loin dans notre raisonnement : Nous avons considéré le gradient d'un champ scalaire *de température*. Mais la démonstration serait la même quel que soit le *champ scalaire* considéré. En fait ce qui fait émerger le caractère vectoriel du gradient  $\vec{\nabla} T$  à partir du champ scalaire  $T(x, y, z)$

c'est l'**opérateur** gradient  $\nabla$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

c'est à dire :

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

L'opérateur  $\nabla$  tout seul ne représente pas une entité tangible. C'est ce qu'on appelle un « opérateur affamé » (de différencier quelque chose...) !

Mais alors si le champ  $T$  n'a pas d'importance au point qu'on puisse l'omettre... Ce qui se transforme lors d'une rotation ce sont les composantes de l'opérateur  $\nabla$  !

D'où l'écriture symbolique suivante pour une rotation d'un angle  $\theta$  dans le plan  $x_0y$  :

$$\nabla_{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y_1} \sin \theta$$

$$\nabla_{y_2} = \frac{\partial}{\partial y_1} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial x_1} \sin \theta$$

Ces composantes se transforment donc comme celles d'un vecteur, on parlera donc d'un *vecteur opérateur*.

**ATTENTION** : Cet opérateur nabla n'est défini qu'en coordonnées cartésiennes.

Revenons à notre opérateur « totalement satisfait » dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\vec{\nabla} X = \frac{\partial X}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial X}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial X}{\partial z} \vec{k}$$

conséquences :

Le gradient en un point est un vecteur. Il a une orientation dans l'espace qui détermine la direction dans laquelle la température (dans notre cas) varie le plus vite lorsqu'on se déplace vers un point proche. En effet le produit scalaire de deux vecteurs est égal, rappelons-le, au produit de leurs modules par le cosinus de l'angle formé par ces vecteurs :

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \|\vec{\mathbf{A}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{B}}\| \cdot \cos a$$

Ce produit scalaire est donc maximal si les vecteurs sont colinéaires ( $\cos 0 = 1$ ) et minimal (en fait nul) si les vecteurs sont orthogonaux ( $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ).

On remarque donc une autre propriété du gradient : il existe (en 2D) une direction (perpendiculaire au vecteur gradient) dans laquelle la température ne varie pas.

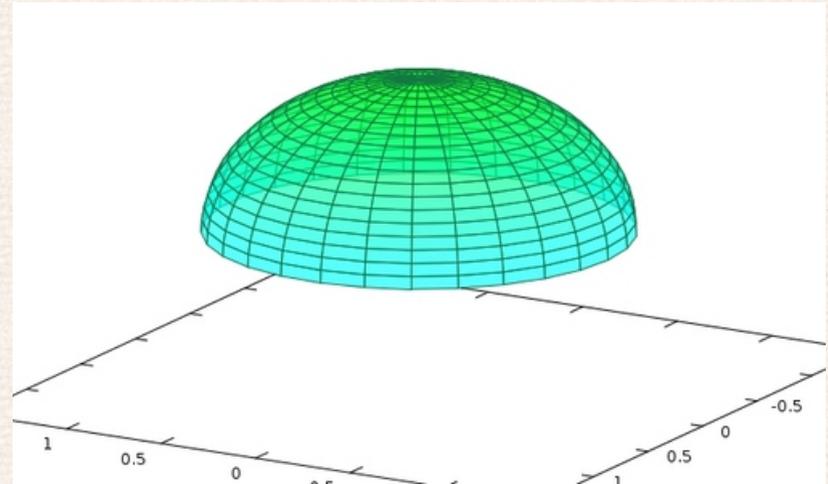
Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  il y a une infinité de directions orthogonales au vecteur  $\vec{\nabla} T$  en un point donné. Toutes ces directions définissent un plan orthogonal au vecteur. Si l'on se déplace dans ce plan d'une distance infinitésimale, on se retrouve en un point où la valeur (scalaire) de la fonction n'a pas varié. Mais à l'arrivée ce plan doit être recalculé (son orientation a changé en même temps que celle du vecteur gradient). De proche en proche ces points de même valeur pour la fonction forment une surface dite *isosurface*. Dans le cas du champ de températures, cette surface est dite surface isotherme.

En électrostatique nous retrouverons ces isosurfaces (équipotentiellles), ainsi qu'en météorologie (ou en 2D des isobares sur les cartes météorologiques et les courbes de niveau sur les cartes topographiques).

**Théorème.** *Le gradient de  $f$  est perpendiculaire en tout point à la ligne de niveau de  $f$  en ce point.*

Voici une illustration de cette propriété en 2D:

Soit la fonction  $f(x, y)$  qui a chaque point du plan horizontal (2D) associe une hauteur (scalaire). Ce peut être une colline ou une coupole posée au sol, comme vous voudrez. Si on trace des courbes de niveau pour chaque hauteur ( $\approx$  « parallèles » sur une mappemonde) et des lignes de plus forte pente (colinéaires au gradient de  $f(x, y)$  en tout points,  $\approx$  « méridiens » sur une mappemonde), ils se croisent à angle droit.



## 2 Intégrale multiple :

C'est une forme d'intégrale qui concerne les fonctions de plusieurs variables. Le calcul d'intégrale multiple se réduit en général à plusieurs calculs d'intégrales simples. Je n'en dis pas d'avantage pour l'instant.

Je préfère vous parler de champs vectoriels, de la divergence et du rotationnel, toutes ces jolies choses qui nous rapprochent à grands pas des Equations de Maxwell.