Applications linéaires - Exemples

Après avoir étudié successivement (et succinctement)

- les espaces vectoriels,
- les applications linéaires qui relient leurs vecteurs entre-eux,
- puis les matrices qui représentent ces applications linéaires et qui permettent d'effectuer toutes sortes de calculs...

nous allons à présent voir ce que tout cela donne en pratique, au travers de quelques exemples simples mais bien concrets.

1 Dérivation d'un polynôme :

La dérivation est une application linéaire.

Considérons l'espace vectoriel constitué par les polynôme degré inférieur ou égal à 2, doté des lois (+) et (.):

$(\mathbb{R}_2[x], +, .)$

$\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$

prenons comme base $\mathcal{B}(1, x, x^2)$

Remarquons que : $\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right) = 3$

soit $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ un vecteur de cet espace vectoriel

$y' \in (\mathbb{R}_2[x], +, .)$ muni de la base $\mathcal{B}'(1, x)$

Nous pouvons écrire une application linéaire φ: $(\mathbb{R}_2[x], +,) \to (\mathbb{R}[x], +, .)$

qui à chaque vecteur $y(x)$ fait correspondre une vecteur $y'(x)$

$\varphi(y(x)) = y'(x)$

L'application linéaire φ peut être représentée par une matrice $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ de 3 colonnes et 2 lignes :

$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$

Calculons les images par cette application linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$

dérivons donc 1 , x, et x^2 qui sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}$

$\varphi(1) = (1)' = 0$ ce qui s'écrit $0 \times 1 + 0 \times x$ dans la base $\mathcal{B}'(1, x)$, c.a.d: 00

-> ce premier résultat nous fournit le contenu de la première colonne de la matrice

$\varphi(x) = (x)^{'} = 1$ ce qui s'écrit $1 \times 1 + 0 \times x$ dans la base $\mathcal{B}'(1, x)$, c.a.d: 10

-> ce deuxième résultat nous fournit le contenu de la deuxième colonne de la matrice

$\varphi(x^2) = (x^2)^{'} = 2x$ ce qui s'écrit $0 \times 1 + 2 \times x$ dans la base $\mathcal{B}'(1, x)$, c.a.d: 02

-> ce troisième résultat nous fournit le contenu de la troisième colonne de la matrice

Nous pouvons donc écrire notre matrice de dérivation :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cela présente ainsi un aspect assez simple pour une dérivation. «Mais voyons « si ça marche », utilisons donc cette matrice pour dériver un polynôme :

soit donc $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ un vecteur de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_2[x], +, .)$

ses composantes sont $a_{0,}a_{1,}a_2$

on peut l'écrire sous forme d'un vecteur colonne $v\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

calculons son image par l'application linéaire φ :(c'est à dire le produit matriciel de la matrice $\mathcal{M}$ représentant φ par ce vecteur):

$$\varphi(v) = \mathcal{M}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a_1 + 0 \\ 0 + 0 + 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$$

Le résultat est un vecteur colonnes à 2 composantes exprimé dans la base $\mathcal{B}'(1, x)$

ce qui signifie que $y'(x) = a_1 \times 1 + 2a_2 \times x = a_1 + 2a_2 x$

Ce qui est bien la dérivée du polynôme :

$y'(x) = a_1 + 2a_2 x$

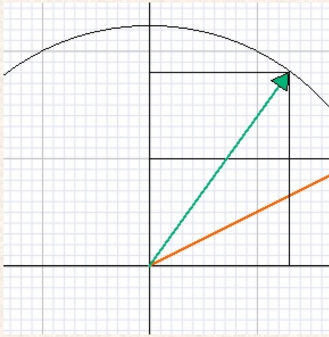
Nous allons maintenant traiter d'autres exemples...

2 Rotation d'angle θ dans le plan

$$\boldsymbol{R}_\theta \colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \boldsymbol{R}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

En quoi cette application linéaire représente-t-elle une rotation ?

Supposons que ce soit le cas et calculons comment se transforment les coordonnées.



Représentons l'espace $\mathbb{R}^2$ par un plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$. Traçons deux vecteurs v_1 et v_2 , de même module a faisant entre eux un angle θ.

$\|v_1\| = \|v_2\| = a$

$v_1 = (a\cos\alpha_1)\vec{i} + (a\sin\alpha_1)\vec{j}$

$v_1 = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ (par hypothèse, voir fig. ci-contre)

$v_2 = (a\cos\alpha_2)\vec{i} + (a\sin\alpha_2)\vec{j}$

$\alpha_2 = \alpha_1 - \theta$ (par hypothèse)

soit $v_2 = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}$ (voir fig. ci-contre)

on identifie x et y ainsi que x_2 et y_2

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha_1 \\ y = a\sin\alpha_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = a\cos\alpha_2 = a\cos(\alpha_1 - \theta) \\ y_2 = a\sin\alpha_2 = a\sin(\alpha_1 - \theta) \end{cases}$$

Il y a de la simplification à la sauce siacobé coasibé dans l'air...

rappel de trigo :
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$$\begin{aligned} x_2 &= a\cos(\alpha_1 - \theta) \\ &= a\left(\cos\alpha_1\cos\theta + \sin\alpha_1\sin\theta\right) \\ &= a\cos\alpha_1\cos\theta + a\sin\alpha_1\sin\theta \\ &= x\cos\theta + y\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= a\sin(\alpha_1 - \theta) \\ &= a(\sin\alpha_1\cos\theta - \cos\alpha_1\sin\theta) \\ &= a\sin\alpha_1\cos\theta - a\cos\alpha_1\sin\theta \\ &= y\cos\theta - x\sin\theta \end{aligned}$$

Nous retrouvons effectivement $\boldsymbol{R}_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$

(cette application linéaire constitue une écriture bien plus compacte et débarrassée de paramètres inutiles comme le module de v).

2.1 Matrice de rotation

Cette application linéaire que nous venons de voir peut être représentée par une matrice, dite matrice de rotation :

On considère le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ orthonormé muni de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$

L'application linéaire « rotation d'angle θ » va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Un vecteur v_1 a pour expression $v_1 = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

$\boldsymbol{R}_\theta(x, y) = (x\cos\theta + y\sin\theta)\,\vec{i} + (-x\sin\theta + y\cos\theta)\,\vec{j}$

Calculons la matrice de $\boldsymbol{R}_\theta$ sachant que la base d'arrivée est la même que celle de départ $\mathbb{R}^2$.

ici « mettons les points sur les i ! (ou plutôt les petites flèches !!) »

dans cette base $\mathbb{R}^2$, le vecteur $\vec{i}$ a pour expression $\vec{i}\binom{1}{0}$ et le vecteur $\vec{j}$ a pour expression $\vec{j}\binom{0}{1}$

on peut aussi les écrire $\vec{i} = 1\times\vec{i} + 0\times\vec{j}$ et $\vec{j} = 0\times\vec{i} + 1\times\vec{j}$

$\boldsymbol{R}_\theta(\vec{i}) = \boldsymbol{R}_\theta\binom{1}{0} = \begin{pmatrix} 1\cos\theta + 0\sin\theta \\ -1\sin\theta + 0\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$ qui s'écrit aussi $\boldsymbol{R}_\theta(\vec{i}) = (\cos\theta)\,\vec{i}$ + $(-\sin\theta)$ $\vec{j}$

Ces coefficients sont ceux qui figureront dans la première colonne de la matrice (en couleur).

$\boldsymbol{R}_\theta(\vec{j}) = \boldsymbol{R}_\theta\binom{0}{1} = \begin{pmatrix} 0\cos\theta + 1\sin\theta \\ -0\sin\theta + 1\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ qui s'écrit aussi $\boldsymbol{R}_\theta(\vec{j}) = (\sin\theta)\ \vec{i} + (\cos\theta)\ \vec{j}$

Ces coefficients sont ceux qui figureront dans la seconde colonne de la matrice.

On peut donc maintenant écrire colonne par colonne la matrice de $\boldsymbol{R}_\theta$:

$$\mathcal{M}\mathrm{at}(\boldsymbol{R}_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2.1.1 Utilisation de cette matrice de rotation :

Soit $\vec{v}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}_2$

son image $\vec{v}_2$ par la matrice de rotation sera égale au produit *matriciel* de la matrice de rotation par ledit vecteur :

$$\vec{v}_2 = \mathcal{M}\mathrm{at}(\boldsymbol{R}_\theta)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

qui est le produit matriciel d'une matrice 2×2 (2 lignes et 2 colonnes) par une matrice 2×1 (2 lignes et 1 colonne). Côté format, pas de problème donc. Le résultat sera de format 2×1.

Disposons les matrices afin d'effectuer le produit *matriciel* :

$$\begin{array}{cc} \text{TROU CARRE} & \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculons les composantes x_2 et y_2 de $\vec{v_2}$ par la méthode des produits *scalaires* comme nous avons appris à le faire :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta \\ y_2 = x_1(-\sin\theta) + y_1 \cos\theta \end{cases}$$

donc : $\vec{v_2} = (x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta)\vec{i} + (y_1 \cos\theta - x_1 \sin\theta)\vec{j}$

C'est bien ce que nous avions trouvé précédemment par le calcul direct des composantes. Si l'on enlève tous mes commentaires, on voit que la méthode de calcul par les matrices est bien plus légère que la méthode directe (dès lors que l'on connait la matrice bien sûr, mais cette étape n'est à faire qu'une fois et peut ensuite servir pour des milliers de calculs).

En programmation informatique, de telles matrices se prêtent bien à une implémentation sous forme de fonctions ou plus précisément de méthodes d'un objet, en C++ (ou tout autre langage orienté objet).