Espaces vectoriels - Exemples

1 Démontrer qu'une famille de vecteurs F est un espace vectoriel :

Plutôt que démontrer que la famille F en question vérifie toutes les propriétés requises, on peut lorsqu'elle est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu (elle est incluse dedans), simplement vérifier qu'elle comprend l'élément neutre pour l'addition (ce qui vérifie par la même occasion qu'elle n'est pas vide), que tout élément symétrique fait partie de la famille proposée, et qu'elle est stable pour les lois (+ et .) ce dernier test peut se fair en une opération unique :

$\forall (x, y) \in \mathbf{F}^2, \quad \forall (\lambda) \in \mathbb{K}, \quad (\lambda x + y) \in \mathbf{F}$

2 Démontrer qu'une famille de vecteurs est libre

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension 2 (qu'on peut assimiler à un plan vectoriel),

de base $\{u, v\}$

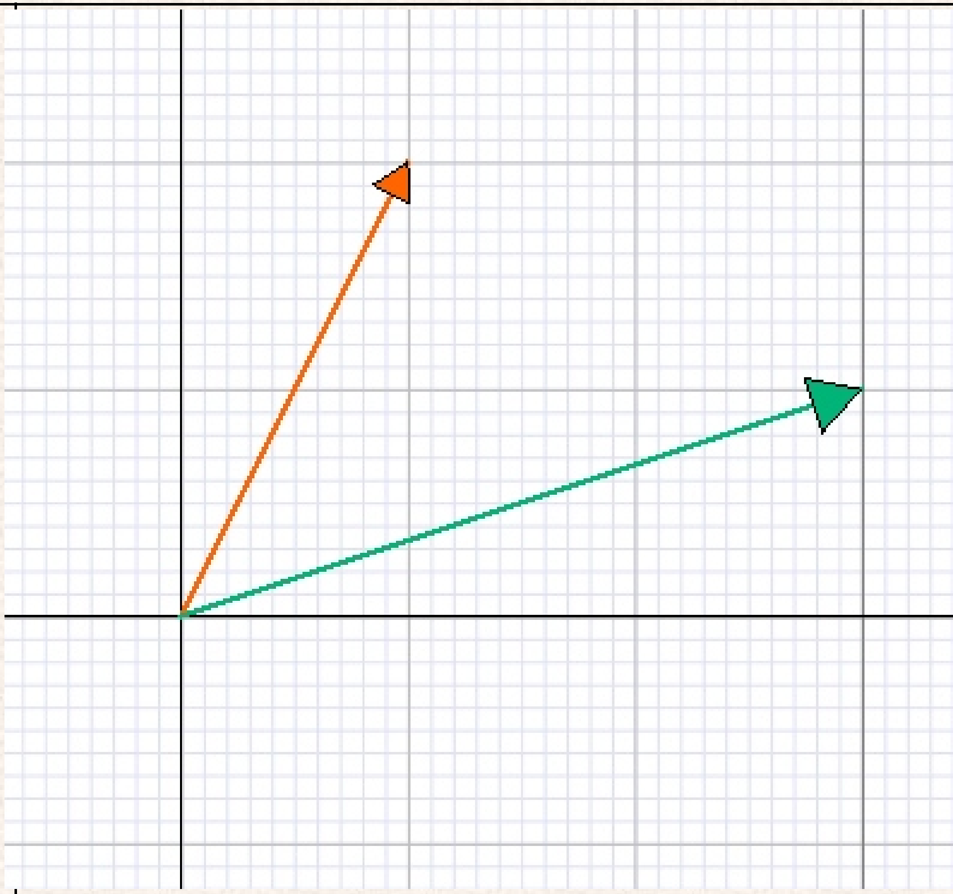
Soit deux vecteurs a et b $\in \mathbf{E}$

tels que

$a = 1u + 2v$

$b = 3u + 1v$

comme représentés sur la figure ci–contre :



Les vecteurs a et b sont-ils indépendants (forment-ils une famille libre) ?

A première vue on aurait tendance à s'écrier : ah non ! ils ne sont même pas perpendiculaires, alors...

ERREUR ! Ils sont indépendants et forment une base de $\mathbf{E}$.

voici la démonstration :

$$\lambda a + \mu b = \vec{0}$$

$$\lambda(u + 2v) + \mu(3u + v) = \vec{0}$$

$$\lambda(1,2) + \mu(3,1) = (0,0)$$

$$\begin{cases} L1: & \lambda + 3\mu = 0 \\ L2: & 2\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

$$L2 - L1:\ \lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 2\mu$$

on reporte dans L1:

$$2\mu + 3\mu = 0$$

$$5\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$$\lambda = 2\mu = 0$$

Nous voyons que le fait de poser qu'une combinaison linéaire de a et de b est nulle implique la nullité des (de tous les) scalaires λ et μ.

Les vecteurs a et b sont donc non liés, ils forment une famille libre. Comme ils sont en nombre égal à la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{E}$, il sont générateurs de cet espace. (Tous les vecteurs de $\mathbf{E}$ peuvent être obtenus par combinaison linéaire de a et b). Il forment donc une base de $\mathbf{E}$.

- oui mais elle est... tordue ! Eh bien il ne faut pas oublier que rien n'oblige les vecteurs de la base d'être « perpendiculaires » (en 2D) ou « orthogonaux » (en 3D). En fait ce qui compte c'est qu'ils ne soient pas colinéaires, sinon ils ne pourraient générer qu'une droite vectorielle mais certainement pas un plan vectoriel.

Et cette démarche pour démontrer l'indépendance des vecteurs fonctionne aussi pour les espaces vectoriels de dimension supérieur à 3.

3 Exemples d'espaces vectoriels

3.1 Exemple d'espace vectoriel avec des polynômes

Prenons par exemple le cas des polynômes de degré inférieur à n doté des lois (+) et (.):

$(\mathbb{R}_n[x], +, .)$

$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}\}$

Ils forment un ensemble vectoriel, en effet :

- l'addition est une loi interne:

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1})$ + $(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1})$

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1})=$

$=(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1}$

qui appartient bien à l'ensemble des P de degré <n.

Remarque : il peut être réellement de degré < aux polynômes considérés si certains coefficients s'annulent lorsqu'on effectue la somme. Deux polynômes de degré <5 (disons 4) peuvent par addition donner un polynôme de degré <4.

La conséquence ? C'est que l'ensemble des polynômes de degré *égal* à 4 (par exemple) n'est pas un espace vectoriel : La somme, qui est possiblement de degré <4 ne fait pas toujours partie des polynômes de degré égal à 4. Il y a donc des pièges à éviter, il suffit d'être bien attentif.

- pour la loi de multiplication par un scalaire, pas de problème :

$$\lambda.(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}) \;=\; \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + ... + \lambda a_{n-1}x^{n-1}$$

qui appartient bien aussi l'ensemble des P de degré <n.

- $(\mathbb{R}_n[x], +, .)$ comprend–il l'élément neutre pour la loi (+) ?

oui, c'est le polynôme nul de degré <n, dont tous les coefficients a_n sont nuls.

3.2 Un exemple plus exotique :

Considérons maintenant l'ensemble des solutions de l'équation différentielle du second ordre homogène sans second membre, simple.

$y'' + a y' = 0$

Nous avons vu lors de l'étude des équations différentielles du second ordre que les fonctions

$f(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ sont solution de cette équation différentielle.

Note : la variable ici est t mais ça peut être x ou toute autre variable $\in \mathbb{R}$

- l'addition est une loi interne :

$$\alpha_1 \cos(\omega t) + \beta_1 \sin(\omega t) + \alpha_2 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t) = (\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\omega t) + (\beta_1 + \beta_2) \sin(\omega t)$$

- La multiplication par un λ externe reste en interne :

$$\lambda(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) = \lambda\alpha \cos(\omega t) + \lambda\beta \sin(\omega t)$$

- L'élément neutre pour l'addition existe

Remarque : l'élément neutre pour l'addition, même si on le note aussi 0 n'est pas le réel 0 :

c'est la fonction nulle $y = 0 \times \cos(\omega t) + 0 \times \sin(\omega t) = 0$ qui fait partie des solutions.

- Quelle est la base ? et le degré ?

Les deux vecteurs de la base sont à l'évidence $\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \sin(\omega t)$ et sont générateurs d'un espace vectoriel de dimension 2.

– Ils sont libres si $\{\forall t \in \mathbb{R} , \quad a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = 0 \} \Rightarrow \quad a = b = 0$

posons donc $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=0$ (cette valeur doit être nulle quel que soit la valeur de t)

et puisque ce doit être vérifié *quel que soit* la valeur de t, on peut donner à t sucessivement deux valeurs qui nous arrangent et voir ce que cela implique pour les valeurs de a et de b.

prenons $t=0$ on a $\sin(\omega t)=0$ et $\cos(\omega t)\neq 0$ donc cela $\Rightarrow \quad a=0$

prenons maintenant $\omega t=\pi/2$ (c.a.d $t=\pi/2\omega$) on a $\cos(\omega t)=0$ et $\sin(\omega t)\neq 0$ donc cela $\Rightarrow b=0$

donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $\quad a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=0$ ne peut être obtenu que si $a=b=0$

les deux vecteurs $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ sont bien libres.

– Il sont générateur :

Tout élément peut être obtenu par une combinaison linéaire de $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega t)$ puisque notre espace vectoriel (supposé) s'écrit justement comme une... combinaison linéaire de $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega t)$.

Un tel espace vectoriel de dimension 2 est parfois appelé un « plan vectoriel ». Une fois connus les vecteurs unitaires $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ formant sa base canonique, chacun des vecteurs de cet espace vectoriel peut être associé à un couple (α,β) de réels : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

Soit $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ généré par la base $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

On peut définir une application f de l'espace vectoriel $\{\mathbb{R}^2,+,.\}$ dans l'espace vectoriel $\{\mathbf{E}$, +, . }

qui à chaque couple de réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fait correspondre un vecteur $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ de $\mathbf{E}$.

$f((a,b)) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

on remarquera que :

cette application est *additive* :

$\forall (a_1,b_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned}
f[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)] &= f[(a_1+a_2, b_1+b_2)] \\
&= (a_1+a_2)\cos(\omega t) + (b_1+b_2)\sin(\omega t) \\
&= a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + b_2\sin(\omega t) \\
&= [a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)] + [a_2\cos(\omega t) + b_2\sin(\omega t)] \\
&= f[(a_1,b_1)] + f[(a_2,b_2)]
\end{aligned}$$

et *homogène*:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2,$

$f[\lambda(a,b)] = \lambda f(a,b)$

Une application qui possède ces deux propriétés est dite linéaire.

Et nous voici donc en présence d'un nouvel outil mathématique : les *applications linéaires*.

Bienvenue dans la branche des mathématiques : *l'algèbre linéaire* !

3.3 Combien de dimensions peut avoir un espace vectoriel ?

Le nombre de dimensions d'un espace vectoriel ne se limite pas à 2 ou 3. Nous avons vu (par exemple) que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n , noté $(\mathbb{R}_n[x], +, .)$ constitue un espace vectoriel d'ordre n. La base possède n vecteurs qui sont les termes en x, $x^2 ... x^n$. Et n peut être aussi grand que l'on veut. Ce n'est qu'un exemple d'espace vectoriel qui peut avoir un grand nombre de dimensions.

- mais alors on ne peut pas les représenter facilement par un dessin ?

En effet, l'algèbre linéaire permet de manier facilement des concepts qui sont difficiles à dessiner, ou même à se prêter à une image mentale. Mais les objets qui sont étudiés par la mécanique quantique, semblent bien débrouiller avec de tels concepts, et l'expérience nous montre que les particules subatomiques comme les quarks ont des comportements et subissent d'incessantes transformations qui ne sont descriptibles que par les mathématiques, parfois bien plus abstraites encore (et en suivant des pistes parfois très spéculatives, mais c'est une autre histoire).

- « un espace vectoriel qui peut avoir un grand nombre de dimensions », oui, mais fini ?

Pas forcément ! Par exemple l'ensemble des polynômes $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$ noté $(\mathbb{R}[x], +, .)$

constitue un espace vectoriel de dimension infinie.

- boudiou ! mais c'est difficile à imaginer !!

Pourtant on réussi bien à imaginer l'ensemble des nombres entiers (pour prendre un exemple simple) qui pourtant est infini !