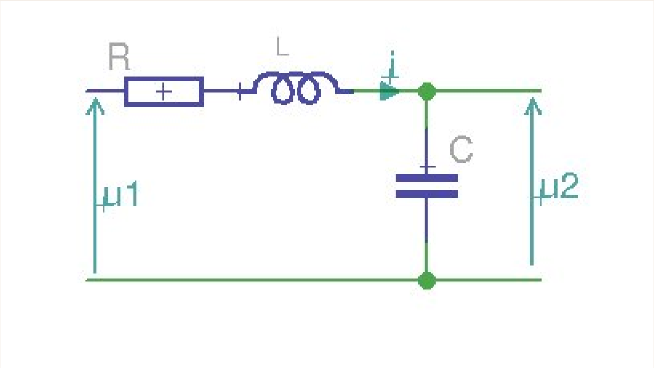
Filtre passe-bas du second ordre

1 Schéma du filtre :



Soit le quadripôle ci-contre constitué :

- d'une résistance
- une inductance
- une capacité

soit $u_1 = Ue^{j\omega t}$

2 Calcul de la fonction de transfert :

$$\mathrm{T} = \frac{u_2}{u_1}$$

Si la sortie n'est pas chargée le courant i est le même dans les trois éléments en série R, L et C. *Vus de l'entrée*, ces trois éléments sont connectés en série et dans ce cas on peut ADDITIONNER leurs impédances complexes afin de connaitre l'impédance équivalente *vue de l'entrée* qui est donc égale à $Z_r + Z_l + Z_c = \mathrm{R} + j\omega L + \frac{1}{j\omega \mathrm{C}}$

Le courant, est donc :

$$i = \frac{u_1}{\mathrm{R} + j\omega L + \frac{1}{j\omega \mathrm{C}}}$$

La tension de sortie du filtre, u_2 qui est la tension aux bornes du condensateur, est égale au produit de ce courant par l'impédance complexe du condensateur :

$$\begin{aligned} u_2 &= i \times Z_c \\ &= \frac{u_1}{\mathrm{R} + j\omega L + 1/\,j\omega C} \times 1/\,j\omega C \\ &= u_1 \frac{1/\,j\omega C}{\mathrm{R} + j\omega L + 1/\,j\omega C} \\ &= u_1 \frac{1}{j\omega \mathrm{RC} + (j\omega)^2 \mathrm{LC} + 1} \\ &= u_1 \frac{1}{1 + j\omega \mathrm{RC} - \omega^2 \mathrm{LC}} \end{aligned}$$

On en déduit directement la fonction de transfert complexe :

$$T(j\omega) = \frac{u_2}{u_1}$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega \mathrm{RC} - \omega^2 \mathrm{LC}}$$

on pose $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \\ m = \frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}} \end{cases}$

Pourquoi ? afin de s'affranchir des valeurs particulières de R, L et C et donc d'obtenir une formulation générale, on dit aussi « normalisée ».

- ω_0 est la fréquence de coupure
- m est appellé le facteur d'amortissement

La fonction de transfert complexe s'écrit alors (sachant que $j^2 = -1$)

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j.2m\frac{\omega}{\omega_0} - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Détails de ce calcul (histoire de ne rien laisser dans l'ombre :

$$\begin{aligned}
2m\frac{\omega}{\omega_0} &= 2m\omega\sqrt{\mathrm{LC}} \\
&= R\sqrt{\frac{C}{L}}\,\omega\,\sqrt{\mathrm{LC}} \\
&= R\omega\,\sqrt{\frac{C}{L}\mathrm{Lc}} \\
&= R\omega\sqrt{C^2} \\
&= \mathrm{RC}\,\omega
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant tracer la réponse en amplitude en fonction de la fréquence de ce filtre, c'est ce qu'on appelle le diagramme de Bode. C'est la courbe du module (au sens vu pour les nombres complexes) de la fonction de transfert.

2.1 Calcul du module :

Posons $x = \dfrac{\omega}{w_0}$

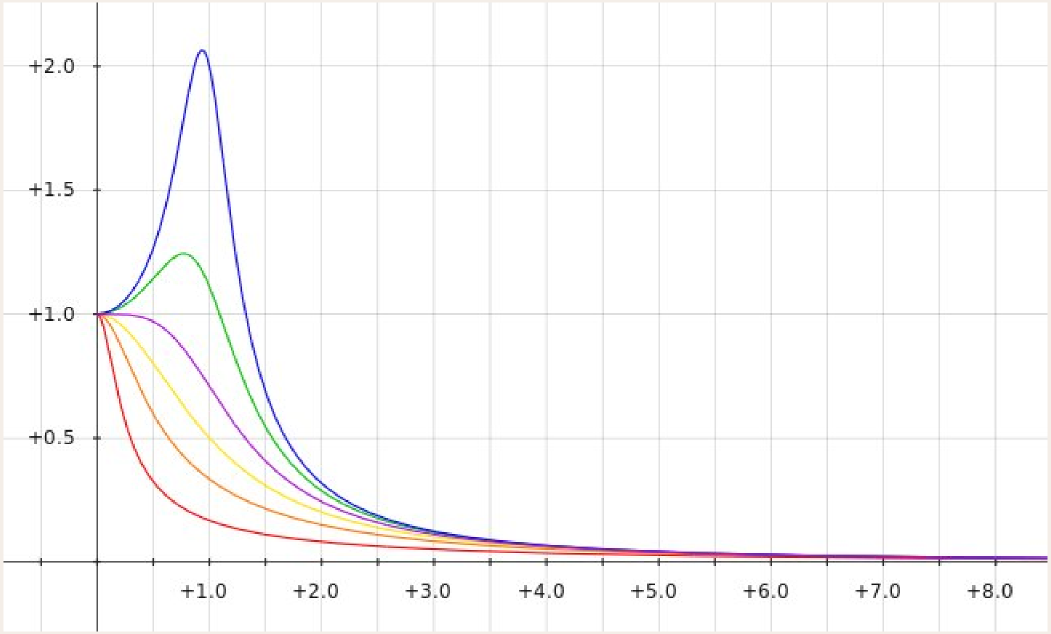
$$T = \frac{1}{1 - x^2 + j\,2mx}$$

Le module, qui est égal à la racine carrée de la somme des carrés de la partie réelle et de la partie imaginaire (voir les pages sur les nombres complexes) est donc :

$$|T| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2mx)^2}}$$

3 Courbes de réponse de $|T|$

3.1 échelle linéaire :



Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de la constante m :

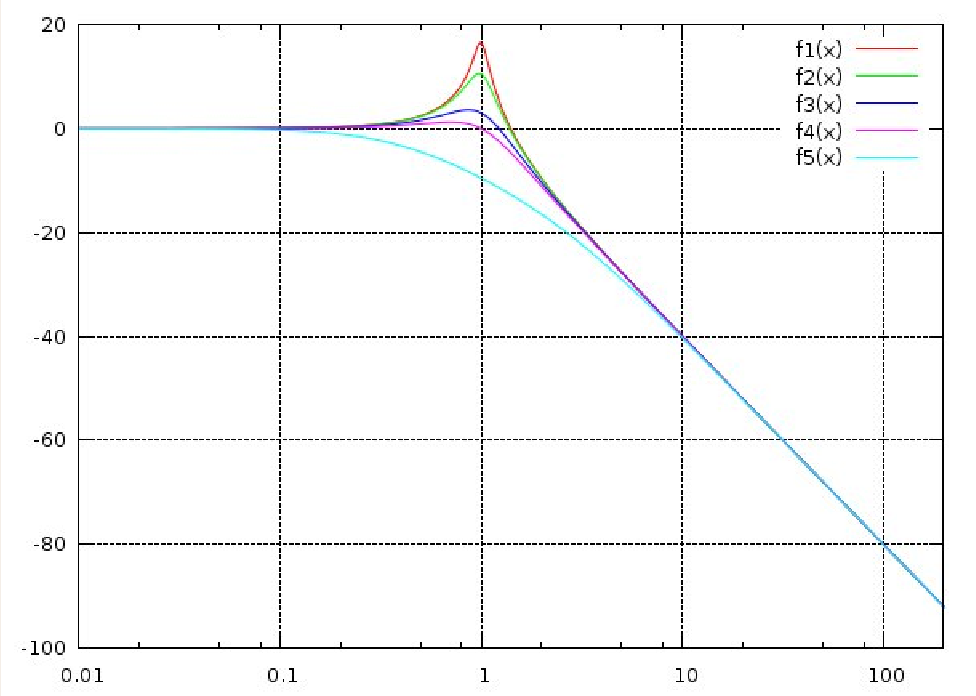
couleur	m
bleu	0.25
vert	0.45
violet	$0.707 = 1/\sqrt{2}$
jaune	1
orange	1.5
rouge	3

En abscisses, $x=\omega/\omega0$

Rappel: ω (pulsation)$=2\,\mathrm{pi}\;f$ (fréquence)

Pour les faibles valeurs de m on a affaire à un circuit résonnant... qui résonne, l'amplitude de sortie devient supérieure à celle d'entrée pour $\omega=\omega0$.

3.2 échelle logarithmique : Diagramme de BODE



Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de la constante m :

En abscisses, $x = \omega / \omega 0$ en échelle log
En ordonnées $20\,\mathrm{Log}\,(T)$
On constate qu'au delà de la fréquence de coupure, la pente des courbes
est de $-40\mathrm{dB}$ / décade.
D'une manière générale les pentes obtenues sont de $20\,n\mathrm{dB}$/décade, n étant l'ordre du filtre.

3.2.1 Voici le listing pour le tracé avec GNUplot :

```
set samples 1000
set xrange [0.01: 200]
set logscale x
set grid
f1(x)=20*log10 (1/sqrt( (1-x**2)**2 +(0.15*x)**2))
f2(x)=20*log10 (1/sqrt( (1-x**2)**2 +(0.3*x)**2))
f3(x)=20*log10 (1/sqrt( (1-x**2)**2 +(0.707*x)**2))
f4(x)=20*log10 (1/sqrt( (1-x**2)**2 +(1*x)**2))
f5(x)=20*log10 (1/sqrt( (1-x**2)**2 +(3*x)**2))
plot f1(x) with lines lt 1 ,f2(x) with lines lt 2 ,f3(x)
with lines lt 3 ,f4(x)
with lines lt 4 ,f5(x) with lines lt 5
```