Equations différentielles

1 Equation différentielle du 1er ordre

C'est une équation qui fait intervenir x, $f(x)$ et $f'(x)$

1.1 Equation différentielle du premier ordre sans second membre :

Elle est de la forme :

$$y' + a y = 0$$

$$\text{avec} \begin{cases} y = f(x) \\ y' = f'(x) \\ a \text{ etant un nombre} \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver une fonction $y = f(x)$ qui soit solution de cette l'équation

$y' = -a y$

nous savons que $(e^{ax})' = e^{ax}$ (voir page sur la dérivée de e^x)

donc $(e^{-ax})' = -a e^{-ax}$

la fonction $y = e^{-ax}$ est donc une solution de l'équation différentielle en effet:

$$\begin{aligned} (e^{-ax})' + a \times e^{-ax} &= -a e^{-ax} + a.e^{-ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit une constante $C \in \mathbb{R}$

On vérifie de même que $C e^{-ax}$ est aussi solution de l'équation $y' + a y = 0$

Conclusion :

Toutes les fonctions $y = C e^{-ax}$ sont solutions de l'équation différentielle $y' + a y = 0$

1.2 Equation différentielle du premier ordre avec second membre :

C'est le cas général, il s'écrit :

$$y' + a y = b$$

voyons si la fonction $y = C.e^{-ax} + b$ est solution ?

$$
\begin{aligned}
(C.e^{-ax} + b)' + a \times (C.e^{-ax} + b) &= -aC.e^{-ax} + a\,(C.e^{-ax} + b) \\
&= -aC.e^{-ax} + aC.e^{-ax} + ab \\
&= ab
\end{aligned}
$$

non, ce n'est pas une solution, toutefois au vu du résultat

on va tenter la fonction $y = C.e^{-ax} + \frac{b}{a}$

$$
\begin{aligned}
(C.e^{-ax} + \tfrac{b}{a})' + a \times (C.e^{-ax} + \tfrac{b}{a}) &= -a\,C.e^{-ax} + a\,(C.e^{-ax} + \tfrac{b}{a}) \\
&= -aC.e^{-ax} + aC.e^{-ax} + a\,\frac{b}{a} \\
&= b
\end{aligned}
$$

Cette fois ça marche, nous pouvons écrire que les toutes les fonctions

$$y = C.e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

sont solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$

Comme vous pouvez le voir, lors de la recherche de la solution d'une équation différentielle, on y va parfois à tâtons, mais rassurez-vous, pour les intégrales c'est pire !

Dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique, il existe des conditions sur la fonction $f(x)$ et sa dérivée qui restreignent l'ensemble des solutions à une solution unique.

Nous allons voir cela plus en détail avec un exemple concret : Le calcul de la charge d'un condensateur par une tension continue à travers une résistance.