Fonction exponentielle de base e

1 Définition

La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

$$y = \ln(x) \Longleftrightarrow x = \exp(y)$$

2 Propriétés

$\ln(1) = 0 \implies$ exp(0)=1

$\ln(e) = 1 \implies \exp(1) = e$

Nous avons vu que :

$$\ln(a\,b) \;=\; \ln(a) + \ln(b) \tag{1}$$

posons :

$\ln(a) = z_1$

$\ln(b) = z_2$

et donc :

$a = \exp(z_1)$

$b = \exp(z_2)$

la formule (1) peut alors s'écrire :

$$\ln(ab) = z_1 + z_2$$

ce qui implique :

$$ab = \exp(z_1 + z_2)$$

en remplaçant a et b par leurs valeurs, nous obtenons :

$$\exp(z_1) \times \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$$

Nous écrirons donc, en reprenant nos variables habituelles a et b :

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$$

d'où découle (je vous le laisse démontrer) :

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

2.1 calcul de $\exp(ab)$:

cas où a est un entier positif :

$$\begin{aligned}\exp(ab) &= \exp\left(b+b+b+\ldots.\, a\,\text{fois}\right)\\ &= \exp\left(b\right)\times\exp\left(b\right)\times\exp\left(b\right)\times\ldots a\,\text{fois}\\ &= (\exp(b))^a\end{aligned}$$

cas général ou $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$$\ln(\exp(b))^a=a\times\ln(\exp(b))$$

$$=a\times b$$

$$=ab$$

or:

$$\ln(\exp(ab))=ab$$

donc

$\ln(\exp(b))^a = \log(\exp(ab))$

$(\exp(x))^a = \exp(ab)$

donc:

$\exp(ab) = [\exp(b)]^a = [\exp(a)]^b$

2.2 Nouvelle notation de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \exp(1 \times x) \\
&= [\exp(1)]^x \\
&= e^x
\end{aligned}$$

d'ou l'écriture :

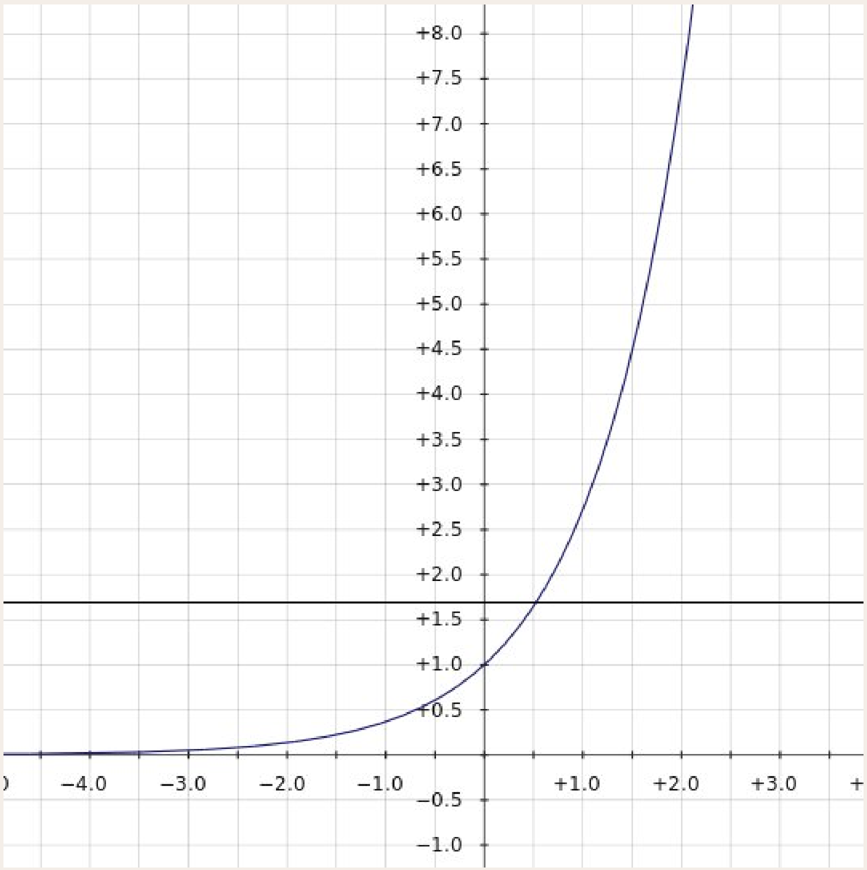
$$\exp(x) = e^x$$

Rappel des propriétés sous cette forme :

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

Au fait à quoi ressemble cette fonction exponentielle ? La voici :



Wahoouu ça monte vite.

On retrouve bien évidemment:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e \, (2,71828....)$

Si on couche le graphique (en permutant x et y), on retrouve la courbe de la fonction logarithme.